АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

## МАТЕМАТИКА

### III

### ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ

**1В1—1В402**

*

U. I. C. C.
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 1 1961

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР канд. физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич* профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

## СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|---|
| Теория вероятностей | 1В1 |
| Математическая статистика | 1В56 |
| Теория игр, исследование операций и математическая экономика | 1В107 |
| Применение теоретико-вероятностных и статистических методов | 1В148 |
| Численные и графические методы | 1В244 |
| Таблицы | 1В311 |
| Вычислительные машины и математические приборы | 1В323 |
| Применение вычислительных машин | — |

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская ул., 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

# МАТЕМАТИКА

## III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

**Рефераты 1В1—1В402** **№ 1** **Январь 1961 г.**

ГПИ б со АН СССР
Техбиблиотека
584/пс

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

**1 В1. Вероятностные меры на банаховом пространстве $C_0$ [0,1].** Kampé de Fériet Joseph. Mesures de probabilité sur l'espace de Banach $C_0$ [0,1]. «C. r. Acad. sci.», 1958, **246**, № 25, 3401—3404 (франц.)

Эта заметка является продолжением серии заметок автора, посвященных заданию вероятностных $L$-мер (т. е. мер, заданных на $\sigma$-алгебрах, относительн которых измеримы все линейные непрерывные функционалы) в банаховых пространствах.

Рассматривается банахово пространство $C_0[0, 1]$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, обращающихся в нуль на концах, с равномерной нормой. Пусть $\{e_n(t)\}$, $n=1, 2, \ldots$ — база Шаудера этого пространства и $\{\tau_n\}$ — последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве. Автор приводит необходимое и достаточное условие, которое нужно наложить на последовательность $\{\tau_n\}$, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n e_n(t) \qquad (1)$$

сходился равномерно почти всюду. Так как последовательность $\{\tau_n\}$, для которой ряд (1) сходится равномерно почти всюду, определяет (посредством естественного отображения) вероятностную $L$-меру на $C_0[0, 1]$, то тем самым описывается общий вид вероятностных $L$-мер на $C_0[0, 1]$. Далее в заметке приводится другое, более простое достаточное условие сходимости ряда (1) равномерно почти всюду (которое не является, однако, вопреки утверждению автора, более общим по сравнению с другим достаточным условием, приводившимся в предыдущей заметке). Предполагая, что $L$-мера на $C_0[0, 1]$ порождается последовательностью $\{\tau_n\}$, удовлетворяющей этому последнему условию (и что выполняется некоторое ограничение на дисперсии величин $\tau_n$ и $E\tau_n = 0$), автор рассматривает линейные непрерывные функционалы на $C_0[0, 1]$; рассматривается также случай нормально распределенных $\{\tau_n\}$. В. В. Сазонов

**1 В2. Обобщенные пространства Лебега.** Винокуров В. Г. «Докл. АН СССР», 1959, **129**, № 1, 9—11

Обобщенным пространством Лебега автор называет пространство $E$ с мерой $m$, обладающее следующими свойствами: 1) $mE = 1$, $m$ — полна; 2) если $x, y \in E$ и $x \neq y$, то существует измеримое множество $A$ такое, что $x \in A$ и $y \in A$; 3) фактор-пространство пространства $E$ по любому измеримому разбиению есть пространство Лебега в смысле В. А. Рохлина (Нужно заметить, что пространства с мерой, удовлетворяющие условиям 1) и 3), суть в точности совершенные пространства). В § 1 вводится определение однотипности двух пространств с мерой; однотипность в случае обычных пространств Лебега совпадает с изоморфизмом mod 0. Формулируется теорема представления безатомных однородных (в определяемом в заметке смысле) обобщенных пространств Лебега, уточняющ я теорему Д. Махарам о представлении булевых алгебр с мерой. Сформулирована также теорема, согласно которой мера в топологическом пространстве, удовлетворяющая 1) и 2) и такая, что мера любого множества есть верхняя грань мер замкнутых компактных множеств, в нем лежащих, есть обобщенная мера Лебега и для всякого обобщенного пространства Лебега существует однотипное с ним пространство такого вида. § 2 посвящен некоторым свойствам вероятностных процессов, заданных в обобщенном пространстве Лебега. В. В. Сазонов

**1 В3. Вероятности на булевой алгебре.** Onicescu Octav. Les probabilités sur une algèbre de Boole. «C. r. Acad. sci.», 1958, **246**, № 23, 3210—3213 (франц.)

Автор дает определение аналога случайных величин со значением в банаховом пространстве и аналога обобщенных случайных процессов в смысле И. М. Гельфанда и К. Ито для случая распределения вероятностей на булевой $\sigma$-алгебре. Работа содержит также определение сходимости по вероятности этих аналогов; формулируется критерий сходимости (соответствующий критерию Коши). В. В. Сазонов

**1 В4. Сепарабельность случайного процесса.** Meyer André. Séparabilité d'un processus stochastique. «C. r. Acad. sci.», 1959, **249**, № 23, 2475—2476 (франц.)

Сообщаются две теоремы. Пусть $E$ — некоторое множество, $\mathfrak{A}$ — борелевское поле его подмножеств, $T$ — произвольное множество индексов, $\Omega = E^T$ (произведение $E$ на себя $T$ раз) и пусть на $\mathfrak{A}^T$ ($\mathfrak{A}^T$ — произведение борелевских полей) задана вероятностная мера $P$. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс измеримых подмножеств $E$, $K = \{K_t\}_{t \in T}$, $K_t \in \mathfrak{K}$ и $V_S(K) = \{\omega : X_t(\omega) \in K_t,\ t \in S \subset T\}$ ($X_t$ — проекция $\Omega$ на $t$-е координатное пространство). В первой теореме устанавливается, что если семейство $\mathfrak{K}$ компактно (т. е. если пересечение множеств некоторого подкласса класса $\mathfrak{K}$ пусто, то существует конечный подкласс этого подкласса такой, что пересечение принадлежащих ему множеств тоже пусто), то существует продолжение $P^*$ меры $P$ такое, что для любого семейства $K = \{K_t\}_{t \in T}$, $K_t \in \mathfrak{K}$, 1) $V_T(K)$ $P^*$-измеримо, 2) $P^*(V_T(K)) = P(V_{S_0}(K))$ для любого счетного $S_0 \subset T$ такого, что $P(V_{S_0}(K)) = \inf P(V_S(K))$, где $S$ пробе-

гает счетные подмножества $T$. Формулировка второй теоремы довольно громоздка. В предположении, что $T$ — локально компактное пространство с заданной на нем мерой Радона $\nu$, $E$ — полное метрическое пространство, $\mathfrak{A}$ — борелевские множества, в ней дается необходимое и достаточное условие того, чтобы существовало продолжение $P^*$, удовлетворяющее 1) и 2) по отношению к некоторым специальным $K$, и чтобы отображение $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ было измеримым относительно произведения мер $\nu \times P^*$ на $T \times \Omega$. В. В. Сазонов

**1 В5. Об условном математическом ожидании и квазикольцах.** Johns M. V., Jr, Pyke Ronald. On conditional expectation and quasi-rings. «Pacif. J. Math.», 1959, **9**, № 3, 715—722 (англ.)

Вводится понятие квазикольца, как совокупности $\varphi$ подмножеств множества $\Omega$, удовлетворяющей условиям: 1) если $A, B \in \varphi$, то $A \cap B \in \varphi$; 2) если $A, B \in \varphi$ и $A \subset B$, то существует система подмножеств $\{C_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, каждое $C_j \in \varphi$, такая, что $C_l \cap C_k = 0$ для $l \neq k$ и $B \setminus A = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$; 3) существует система подмножеств $\{A_j\}$, $j = 1, \ldots, \infty$, каждое $A_j \in \varphi$, такая, что $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Устанавливаются некоторые свойства квазикольца. В качестве примеров квазиколец автор приводит класс всех открытых слева и замкнутых справа прямоугольников в $R_n$ с лебеговой мерой, меньшей или равной 1. Алгебра и $\sigma$-алгебра тоже являются квазикольцами. Пусть $E$ — пространство $P$-измеримых случайных величин, рассматриваемых на поле $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Класс всех $\sigma(\varphi)$-измеримых $Y \in E$, удовлетворяющих системе функциональных уравнений $M_\circ(X - Y) I_A = 0$, где

$$X \in E, \quad I_A = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A; \\ 0, & \text{если } \omega \notin A, \end{cases} \quad \text{и} \quad M_\circ X = \int_\Omega X dP$$

для всех $A \subset \varphi \subset \mathfrak{A}$, называется условным математическим ожиданием $X$ при условии $\varphi$ и обозначается $M\{X \mid \varphi\}$. Вводится определение: Квазикольца $\varphi_1$, $\varphi_2$ условно независимы при условии $\varphi$ (кратко $\varphi_1$, $\varphi_2$ у. н. $\mid \varphi$), если для всех $A \in \varphi_1$, $B \in \varphi_2$ $M\{I_A I_B \mid \varphi\} = M\{I_A \mid \varphi\} M\{I_B \mid \varphi\}$. Случайные величины $X$, $Y$ у. н. $\mid \varphi$, если $\mathfrak{B}(X)$, $\mathfrak{B}(Y)$ у. н. $\mid \varphi$. $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ — соответствующее борелевское множество. Далее устанавливаются основные свойства условного математического ожидания. С помощью введенных понятий автор простым и коротким способом доказывает теорему: Для случайных величин $X$, $Y$, $Z$ следующие утверждения эквивалентны: а) $Z$ и $X$ у. н. $\mid Y$; в) $Z - Y$ и $X - Y$ у. н. $\mid Y$; с) $P\{Z \leqslant z \mid Y, X\} = P\{Z \leqslant z \mid Y\}$. В. А. Маковский

**1 В6. Число компонент в случайном линейном графе.** Austin T. L., Fagen R. E., Penney W. F., Riordan John. The number of components in random linear graphs. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 3, 747—754 (англ.)

Даны $n$ различных точек и производится случайная выборка $m$ пар точек, так что каждая из $\binom{n}{2}$ возможных пар имеет одинаковую вероятность $1/\binom{n}{2}$ появления при каждом испытании. Появляющаяся в результате каждого испытания пара точек соединяется линией, а линия отмечается порядковым номером ее появления. Таким образом после $m$ испытаний образуется линейный граф, имеющий $n$ различных (пронумерованных) вершин и $m$ различных (пронумерованных) ребер, соединяющих пары вершин, состоящий из некоторого числа $p$ не связанных друг с другом частей (замкнутых компонент) (каждая изолированная вершина считается компонентой).

Находится распределение числа таких компонент. Получены выражения для $T_{n,m,p}$ (число графов, имеющих $n$ вершин, $m$ ребер и $p$ компонент) и $C_{n,m} = T_{n,m,1}$ (число связанных графов: графов с одной компонентой). Кроме того, в работе приводятся выражения для частных случаев: $T_{n,n-1,1}$; $T_{n,n,1}$; $T_{n,m,n-1}$; $T_{n,m,n-2}$; $T_{n,m,n-3}$. Определяется также среднее число $(M_{n,m})$ компонент в графе, имеющем $n$ вершин и $m$ ребер, и приводятся выражения для аппроксимации частного значения среднего числа компонент $M_{n,m}$. Библ. 3 назв. А. Д. Харкевич

**1 В7. Достоверность и невозможность в теории вероятностей.** Besuden H. Über Gewißheit und Unmöglichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. «Math. und naturwiss. Unterr.», 1959—1960, **12**, № 8, 370—371 (нем.)

**1 В8. К технике вычисления семиинвариантов.** Леонов В. П., Ширяев А. Н. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, **4**, № 3, 342—355 (рез. франц.)

Пусть для $i = 1, 2, \ldots, k$ компонент $\eta_i$ $k$-мерного случайного вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$ может быть представлен как полином компонентов $m_i$-мерного случайного вектора $\xi_i = (\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,m_i})$ (Случайные величины $\xi_{i,j}$ не обязательно различны). Авторы выражают моменты $\eta_i$ через семиинварианты случайного вектора $\xi = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \ldots, \xi_{1,m_1}, \xi_{2,1}, \ldots, \xi_{k,m_k})$. Заданное выражение для моментов является суммой, из которой соответственный семиинвариант получается путем вычеркивания некоторых членов. Указывается метод опознания лишних и нужных членов соответственно. В качестве примера берется случайная функция, квадратически зависящая от гауссовской.

I. Vincze, E. Csáki

**1 В9. Об условиях согласованности заданных сечений закона вероятностей.** Lévy Paul. Sur les conditions de compatibilité des données marginales relatives aux lois probabilité. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 14, 2507—2509 (франц.)

Пусть каждая из трех случайных величин может принимать лишь два значения, соответственно $A$ или $A'$, $B$ или $B'$, $C$ или $C'$. Вероятности $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ обозначим соответственно $a$, $b$, $c$. Двумерные вероятности $P(B, C)$ $P(C, A)$, $P(A, B)$ обозначим $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Как одномерные, так и двумерные вероятности считаются заданными. Если обозначить трехмерную вероятность $P(A, B, C)$ через $x$, то при помощи $x$ и заданных выше величин выражаются и все остальные трехмерные вероятности $P(A', B, C)$, $P(A', B', C)$ и т. д. Поскольку все они должны заключаться между 0 и 1, можно получить, что $m \leqslant x \leqslant M$, где $m = \max(0, \beta + \gamma - a, \gamma + \alpha - b, \alpha + \beta - c)$, $M = \operatorname{Min}(\alpha, \beta, \gamma, 1 - a - b - c + \alpha + \beta + \gamma)$. Таким образом выводится необходимое и достаточное условие согласованности заданных одномерных и двумерных сечений трехмерного закона вероятностей: $m \leqslant M$. Если $m < M$, то вероятность $P(A, B, C)$ может принимать любое значение между $m$ и $M$. Аналогично может быть получено условие согласованности заданных $k$-мерных сечений $(k = 1, \ldots, n-1)$ $n$-мерного закона вероятностей для случая, когда соответствующие случайные величины принимают по два значения. Указаны методы, позволяющие в принципе находить условия согласованности заданных сечений закона вероятностей для случайных величин, принимающих более чем два значения. Р. Ф. Матвеев

**1 В10. Двумерные плотности с данными частными плотностями и обобщения.** Kantorovitz S. Two-dimensional frequency distribution functions with given marginals, and generalizations. «Bull. Res. Council Israel», 1957, **F7**, № 1, 43—44 (англ.)

Пусть $F_0$ — класс линейных комбинаций суммируемых функций $f(x)\,g(y)+\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\,g_i(y)$, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} g_i(x)\,dx=0\ (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

Пусть $C_1$ ($R_2$) — класс пределов в смысле сходимости почти всюду неубывающих последовательностей ступенчатых функций двух переменных. В работе приведена теорема: Любая двумерная плотность распределения вероятностей $\varphi(x,\ y)\in C_1(R_2)$, удовлетворяющая условиям $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ y)\,dy=f(x)$, $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ y)dx=g(y)$, принадлежит к замыканию класса $F_0$ в смысле сходимости почти всюду и в смысле сходимости $L_1$.

K. Urbanik

**1 В11. Одно замечание к работе Эссеена «Моментное неравенство с применением к центральной предельной теореме».** Рогозин Б. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 1, 125—128 (рез. англ.)

Пусть $X_1, X_2,\ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными абсолютными моментами третьего порядка $\beta=E|X_j|^3$. Пусть

$$\sigma^2=EX_j^2,\quad F_n(x)=P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}X_j<x\right\},$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad \rho_3=\beta/\sigma^3.$$

Как показал Эссеен в упоминаемой в заглавии работе (РЖМат, 1958, 2208), справедливо неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\sqrt{n}\,|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant K\rho_3,$$

где $K=\dfrac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}$. Автор доказывает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \inf_{\substack{-\infty<a<\infty\\0<\sigma_1<\infty}}\sup_x\sqrt{n}\left|F_n(x)-\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right|\leqslant\frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}}.$$

Для симметричной схемы Бернулли имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\ \inf_{a,\ \sigma_1}\sup_x\sqrt{n}\left|F_n(x)-\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)\right|=\frac{\rho_3}{\sqrt{2\pi}}.$$

В. В. Петров

**1 В12. О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова.** Прохоров Ю. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 1, 103—113 (рез. англ.)

Пусть $X_1, X_2,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковую функцию распределения $F(x)$. Пусть $\mathfrak{G}$ — совокупность всех неограниченно делимых функций распределения, $F^n(x)$ — функция распределения суммы $X_1+X_2+\ldots+X_n$,

$$\psi(n)=\sup_F\inf_{G\in\mathfrak{G}}\sup_x|F^n(x)-G(x)|.$$

Основной результат работы состоит в получении оценок $\dfrac{C_1}{n\ln n}<\psi(n)<\dfrac{C_2\ln^2 n}{n^{1/3}}$. Тем самым значительно усилена оценка для $\psi(n)$ $C_0n^{-1/5}$, полученная в 1956 г. А. Н. Колмогоровым, и впервые установлена нижняя оценка для $\psi(n)$. Здесь $C_0, C_1, C_2$ — абсолютные положительные постоянные.

В. В. Петров

**1 В13. Предельные распределения сумм независимых двузначных случайных величин.** Kubik L. The limiting distributions of cumulative sums of independent two-valued random variables. «Studia math.», 1959, **18**, № 3, 295—309 (англ.)

Референтом была поставлена следующая проблема: Пусть $X_1, X_2,\ldots$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих два значения. Определить класс распределений, которые могут появиться в качестве предельных для сумм $Y_n=\dfrac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-A_n$ при надлежащем подборе постоянных $A_n$ и $B_n>0$ так, что величины $X_k/B_n$ асимптотически пренебрежимы. Работа посвящена частному решению этой проблемы. Рассматривается класс $\mathfrak{R}$ таких предельных распределений последовательности $Y_n$, дисперсия которых является пределом дисперсий $Y_n$. Утверждается, что класс $\mathfrak{R}$ совпадает с классом $\mathfrak{K}$ всех бесконечно делимых распределений, для которых функция $K(u)$ в формуле Колмогорова имеет вид:

$$K(u)=\begin{cases}0 & \text{при } u<A,\\ \mu-\dfrac{\mu}{A^2}u^2 & \text{при } A\leqslant u<0,\\ \dfrac{\nu}{B^2}u^2+(1-\nu) & \text{при } 0<u\leqslant B,\\ 1 & \text{при } u>B,\end{cases}\qquad(1)$$

где $\nu,\mu\geqslant 0$, $\nu+\mu\leqslant 1$, $A\leqslant 0$, $B\geqslant 0$. Примечание референта. Класс $\mathfrak{R}$ не исчерпывается распределениями из $\mathfrak{K}$. Как мне сообщил автор, некоторые выпуклые комбинации функций, удовлетворяющих условию (1), определяют распределение из $\mathfrak{R}$.

K. Urbanik

**1 В14. Распределение квадратичных форм от нормальных случайных величин. Предварительный набросок теории с приложениями к спектральному анализу.** Grenander Ulf, Pollak H. O., Slepian D. The distribution of quadratic forms in normal variates: a small sample theory with applications to spectral analysis. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1959, **7**, № 4, 374—401 (англ.)

Статья представляет довольно обширный очерк, касающийся вопроса нахождения распределений квадратичных форм от нормально распределенных случайных величин и различных приближенных выражений этих распределений, удобных для вычислительной работы. Статья разбита на пять частей. Часть I посвящена отысканию точного распределения случайной величины

$$Q=\sum_{i,\ j=1}^{n}w_{ij}x_ix_j,\qquad(1)$$

где $w_{ij}$ — элементы неотрицательно определенной симметрической матрицы $W$, $x_i$, $x_j$ — нормальные случайные величины с нулевым математическим ожиданием. $R=(r_{ij})$ — матрица ковариаций, $r_{ij}=M\{x_i\ x_j\}$, $i,\ j=1,\ldots,n$. Плотность распределения случайной величины $Q$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixz}\prod_{\nu=1}^{n}(1-2iz\lambda_\nu)^{-1/2}dz,\qquad(2)$$

где $\lambda_\nu$ — собственные числа матрицы $RW$. Указывая на трудность оценки или приближенного вычисления интеграла (2), авторы приводят интегральное уравнение, решением которого является функция распределения $G(x)$ случайной величины $Q$

$$xG(x)=\int_0^x G(x-y)\,H(y)\,dy,\qquad(3)$$

где $H(y)=1+\dfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}e^{-x/2\lambda_\nu}$. Часть II посвящена отысканиям приближенных распределений $Q$. В частном случае, когда $Q=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\xi_\nu^2$ и $\lambda_\nu$ — собственные числа матрицы Тёплица

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \dots c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & c_0 \end{pmatrix},$$

где $c_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu\lambda}\,dW(\lambda)$ ($\nu=0,\pm1,\pm2,\dots$), а $W(\lambda)$ — ограниченная неубывающая абсолютно непрерывная функция, авторы получают приближенную плотность

$$g_a(x)=\frac{1}{\pi}\int_{1/2M}^{\infty} e^{-xv-\frac{n}{2}R(v)}\sin\left[\frac{n}{4}\theta(v)\right]dv,$$

где $\theta(v)=$ мера $\left\{\lambda\colon w(\lambda)\geqslant\frac{1}{2v}\right\}$ и $R(v)=\frac{1}{2\pi}\int_S \log|1-2vw(\lambda)|\,d\lambda$. Здесь $w(\lambda)=W'(\lambda)$ и $0\leqslant w(\lambda)\leqslant M<\infty$. $S$ — носитель $w(\lambda)$, т. е. множество $\lambda$, для которого $w(\lambda)>0$. В той же части рассматривается приближенное распределение непрерывных квадратичных форм, т. е. случайных величин

$$Q=\int_0^T\int_0^T w(t_1,t_2)\,x(t_1)\,x(t_2)\,dt_1dt_2,$$

где $W(t_1,t_2)$ — неотрицательно определенное ядро, а $x(t)$ — случайный гауссовский процесс, математическое ожидание которого нуль, а корреляционная функция $R(t_1,t_2)=M\{x(t_1)\,x(t_2)\}$. Приближенное распределение находится в том случае, когда $U(t,s)=\int_0^T R(t,x)\,W(x,s)\,dx$ имеет вид $U(t-s)=U(\tau)$ и $U(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\,dW(\lambda)$, $W(\lambda)$ — ограниченная неубывающая абсолютно непрерывная функция. В части III рассматриваются приложения полученных выше результатов к спектральной теории стационарных временных рядов. Если $\dots x_{-1}, x_0, x_1\dots$ — стационарный временной ряд, то $R=(r_{ij})$ — матрица ковариаций состоит из элементов

$$r_{ij}=r_i=M\{x_jx_{j+i}\},\quad i,j=0,\pm1,\pm2,\dots$$

и $r_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\nu}\,dF(\lambda)$. $F(\lambda)$ называют спектральной функцией. Можно ввести квадратичную форму

$$Q=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} w_{\nu-\mu}\,x_\nu\,x_\mu,$$

где $w_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu\lambda}\,dW(\lambda)$. $W(\lambda)$ — ограниченная неубывающая функция с полной вариацией, равной 1; $W$ называют спектральной весовой функцией; обычно предполагают ее абсолютно непрерывной. Показывается, что выбором различных $w(\lambda)=W'(\lambda)$, сосредоточенных на том или ином достаточно узком участке спектра, без знания $F(\lambda)$ можно построить приближенное распределение величины $Q$ и по нему оценить $F(\lambda)$. В части IV приводятся примеры численного решения интегрального уравнения (3). На многочисленных графиках сравниваются различные приближенные плотности с точными. Наконец, в части V кратко формулируются установленные выше этапы построения теплицевских приближений. В. А. Маковский

**1 В15. Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга.** Линник Ю. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, 4, № 3, 311—321 (рез. англ.)

Предлагается новое доказательство центральной предельной теоремы (в условиях Линдеберга), опирающееся на использование некоторых теоретико-информационных понятий. Основная идея доказательства такова: для одномерных случайных величин $X$, имеющих непрерывную ограниченную плотность распределения, определяется функционал от этой плотности $I(X)$, представляющий собой (с точностью до константы) разность шенноновской энтропии $H(X)$ и энтропии нормального распределения с дисперсией, равной дисперсии $X$. Далее рассматриваются специальным образом сглаженные нормированные суммы $S_m$ независимых случайных величин $X_1, X_2,\dots,X_m$ (где $m=1,2,\dots$) и доказывается (с помощью неравенства Крамера—Рао или же непосредственным подсчетом), что $I(S_{m+1})-I(S_m)\geqslant 0$, причем «насыщение» здесь возникает лишь тогда, когда распределение суммы $S_m$ приближается к нормальному. После этого показывается, что условие Линдеберга влечет за собой монотонное возрастание величины $I(S_m)$; так как, к тому же, величина эта ограничена сверху, то отсюда удается вывести необходимость выполнения центральной предельной теоремы.

В заключение отмечается, что аналогичное доказательство можно также получить, рассматривая вместо $I(S_m)$ величину $I(S_{m+1}, S_m)$ — информацию о сумме $S_m$, содержащуюся в $S_{m+1}$. А. М. Яглом

**1 В16. Вероятность и статистика.** Smith Walter L. Probability and statistics. «Nature (Engl.)», 1960, **186**, № 472, 338 (англ.)

Без доказательства формулируются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие справедливость теоремы о плотности функции восстановления. Это уточняет результат автора (РЖМат, 1936, 8963). П. А. Строганов

**1 В17. О свертке процесса Пуассона.** Homma Tsuruchiyo. On a convoluted Poisson process. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs», 1953, 3, № 1, 6—12 (англ.)

Рассматривается стохастический процесс случайных событий $X(t)$, где $X(t)$ есть число событий, появившихся за промежуток времени $(0,t)$. Относительно процесса делаются следующие предположения: А) При $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4\leqslant\dots\leqslant t_{2k-1}<t_{2k}$ случайные переменные $X(t_2)-X(t_1)$, $X(t_3)-X(t_2),\dots$ попарно независимы. В) Пусть $P_k(s,t)$ — вероятность того, что появилось точно $k$ событий за промежуток времени $(s,t)$. Для произвольно малого $\varepsilon>0$ и произвольно большого $T>0$ можно найти $\delta>0$ такое, что при $\sum_{z=1}^{n}(t_{2r}-t_{2r-1})<\delta$ и $t_{2n}<T$ выполняется неравенство $\prod_{r=1}^{n}P_0(t_{2r-1},t_{2r})>1-\varepsilon$. С) Для произвольного $s\geqslant 0$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P_k(s,s+\Delta s)}{1-P_0(s,s+\Delta s)}=m_k(s)\quad(k=1,2,3,\dots),$$

где $m_k(s)$ непрерывна. В предположениях А), В) и С) верна

Теорема 2. Процесс $X(t)$ есть свертка процесса Пуассона. Если события имеют определенную длительность и известна вероятность $\psi(t,\tau)$ того, что событие, появившееся в момент времени $t$, закончится до момента времени $t+\tau$, то относительно числа событий $\eta(t)$, имеющих место на момент времени $t$, верна следующая Теорема 3. Если $\psi(x,t-x)$ непрерывна по $x$ при фиксированном $t$ и $\sum_{j=1}^{\infty}jm_j(s)<M$ (для каждого $s$ $(0\leqslant s\leqslant T)$), то распределение $\eta(t)$ есть свертка закона Пуассона с характеристической функцией

$$f(\Theta)=\exp\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty} m_j(x)\,[\{\psi(x,t-x)+$$
$$+(1-\psi(x,t-x))e^{i\Theta}\}^j-1]\lambda(x)dx.$$

Указанные теоремы являются обобщением соответствующих теорем Реньи (1951). П. А. Строганов

**1 В18. О произведении двух псевдослучайных функций.** Bertrandias Jean-Paul. Sur le produit de deux fonctions pseudoaléatoires. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 2, 263—265 (франц.)

Согласно определению, предложенному Бассом, псевдослучайной функцией называется функция $f(t)$, равная нулю при $t>0$, и такая, что существует корреляционная функция

$$\gamma(h)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\,f(t+h)\,dt, \qquad (1)$$

являющаяся непрерывной, положительной в точке $h=0$ и стремящейся к нулю при $h\to\infty$. При этом было показано, что все функции вида

$$F(t)=\exp\{2\pi i\varphi([\alpha t+\xi])\} \qquad (2)$$

($[x]$ — целая часть $x$), где $\varphi(x)$ — многочлен степени $\nu\geqslant 2$ с иррациональным коэффициентом при $x^\nu$, являются псевдослучайными. Рассматривается произведение

$$F_1(t)\cdot F_2(t)=\exp\{2\pi i\,\varphi_1([\alpha t+\xi])+2\pi i\,\varphi_2([\beta t+\eta])\} \qquad (3)$$

двух таких псевдослучайных функций. Доказывается, что это произведение также будет псевдослучайной функцией всегда, когда не выполняется хоть одно из следующих трех условий: а) $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — многочлены одинаковой степени $\nu$, б) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q}$ является рациональным числом ($p$ и $q$ — целые) и в) числа $p$ и $q$ удовлетворяют соотношению: $Ap^\nu+Bp^\nu=r$, где $A$ и $B$ — коэффициенты при $x^\nu$ в многочленах $\varphi_1(x)$ и соответственно $\varphi_2(x)$, а $r$ — некоторое рациональное число. Что же касается исключительного случая, в котором выполняются все указанные условия, то здесь функция (3) может как быть, так и не быть псевдослучайной. А. М. Яглом

**1 В19. Некоторые линейные свойства псевдослучайных функций.** Bass Jean. Quelques propriétés linéaires des fonctions pseudo-aléatoires. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 2, 266—268 (франц.)

Рассматриваются псевдослучайные функции вида $F(t)=\exp\{2\pi i\varphi([t])\}$, где $[t]$ — целая часть $t$, а $\varphi(t)$ — многочлен степени $\nu\geqslant 2$ с иррациональным коэффициентом при старшем члене (ср. предыдущий реферат). Доказывается, что если $\delta(\alpha)$ — функция ограниченной вариации, имеющая скачок величины $c_0$ в точке $\alpha=0$, то функция $g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha t)\,d\tau(\alpha)$ разлагается на сумму константы $c_0$, функции $g_1(t)$ с нулевым средним квадратом, (т. е. такой, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|g_1(t)|^2\,dt=0,$$

и псевдослучайной функции $g_2(t)$ с выпуклой корреляционной функцией $\gamma_{g_2}(h)$; при $c_0=0$ функция $g(t)$ сама будет псевдослучайной функцией, имеющей ту же корреляционную функцию, что и $g_2(t)$ (но функция $g(t)-g_2(t)$ не будет псевдослучайной). А. М. Яглом

**1 В20. Броуновское движение вращения.** Gorman C. D. Brownian motion of rotation. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, **94**, № 1, 103—117 (англ.)

Рассматривается последовательность случайных процессов $R^{(n)}(t)$ на единичной сфере в трехмерном евклидовом пространстве, связанных с броуновским движением. Для этого сначала по траектории броуновского движения $(x(t), y(t))$ на плоскости строится случайная траектория $(x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$, составленная из прямолинейных отрезков при $(k-1)/2^n\leqslant t\leqslant k/2^n$ и такая, что $x^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right)=x\left(\frac{k}{2^n}\right)$ и $y^{(n)}\left(\frac{k}{2^n}\right)=y\left(\frac{k}{2^n}\right)$ при всех $0\leqslant k\leqslant 2^n$.

Далее на сфере $S$ радиуса 1 выбирается точка $P$ и ориентированный большой круг, проходящий через $P$. Помещая $S$ на плоскость так, чтобы точка $P$ совпала с началом координат, а касательная к большому кругу была направлена по оси $OX$, начинаем катить $S$ по плоскости без скольжения (и без вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости $XOY$) с постоянной угловой скоростью на каждом из участков $\frac{k-1}{2^n}<$ $<t<\frac{k}{2^n}$; при этом точка касания $S$ с плоскостью должна двигаться по траектории $(x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$. Обозначим $R^n(t)$ поворот $S$ вокруг своего центра при описанном движении. В работе доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}R^{(n)}(t)$ существует равномерно по $t$ в $[0,1]$ для почти всех траекторий броуновского движения на плоскости. Для полученного таким путем непрерывного случайного процесса указан (без доказательства) вид его характеристической матрицы. Связь между построенным процессом и процессом, полученным путем решения соответствующего дифференциального уравнения параболического типа, не обсуждается.

Р. З. Хасьминский

**1 В21. О некоторых процессах «броуновского движения».** Malecot G. Sur quelques processus de «mouvement brownien». «Ann. Univ. Lyon», 1957, **A**, № 20, 33—53 (франц.)

Приращение случайного процесса $X(t)$ за время $\Delta t\to 0$ $\Delta X(t)=\Delta_1X+\Delta_2X$, где $\Delta_1X$ и $\Delta_2X$ независимы и $M(\Delta_1X)=a\,\Delta t+o(\Delta t)$, $M(\Delta_1X)^2=b\Delta t+o(\Delta t)$, $M(\Delta_1X)^p=$ $=o(\Delta t)$ $(p\geqslant 3)$, а $\Delta_2X$ с вероятностью $\mu_i\Delta t+o(\Delta t)$ принимает значение $\alpha_i$. Процесс $X(t)$ в случае $a=b=0$ (отсутствие внешних сил) можно рассматривать как скорость частицы, движущейся по прямой и испытывающей столкновения с молекулами, обладающими массами $m_i$ и скоростями $v_i$. В этом случае $\alpha_i=p_i(v_i-x)$, где $x$ — значение $X(t)$, коэффициент $p_i$ зависит от $m_i(0<p_i<2)$. Показано, что $F(t,s)=M^{esX(t)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t}=sM[a\,e^{sX(t)}]+\frac{s^2}{2}M\,[b\,e^{sX(t)}]+M[H(s)\,e^{sX(t)}], \qquad (1)$$

где $H(s)=\sum_i\mu_i(e^{\alpha_i s}-1)$. Величины $a, b, H(s)$ могут зависеть от прошлого процесса $X(t)$. Рассматриваются различные частные случаи (1): 1) В случае марковского процесса с $a=b=0$, $\alpha_i=p_i(v_i-x)$ (1) имеет вид $\frac{\partial F}{\partial t}=\sum_i\mu_i e^{sp_iv_i}F[(1-p_i)s,t)]-\sum_i\mu_iF(s,t)$. Решение может быть получено в виде ряда $\sum_{p=0}^{\infty}[MX^p(t)]\frac{s^p}{p!}$. Легко вычисляется

$$\lim_{t\to\infty}MX(t)=\frac{\sum_i\mu_ip_iv_i}{\sum_i\mu_ip_i}\quad\text{и}$$

$$\lim_{t\to\infty}DX(t)=\frac{\sum_i\mu_ip_i^2(v_i-\bar{A}_1)^2}{\sum_i\mu_ip_i(2-p_i)}.$$

2) Если $\alpha_i$ не зависят от $x$, то процесс является суммой независимых процессов Пуассона со скачками $\alpha_i$ и параметрами $\mu_i$. 3) «Броуновский осциллятор». Скорость $X(t)$ частицы с массой $m=1$, находившейся в

момент $t$ в положении $y$, за время $\Delta t$ получает приращение $-\omega^2 y\,\Delta t$ и случайное приращение $\alpha_i p_i(v_i - x)$ с вероятностью $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$. Из (1) в этом случае следует $\frac{\partial F}{\partial t} = -\omega^2 s M[Y(t) e^{sX(t)}] + M[H(s) e^{sX(t)}]$, где $Y(t)$ — координата частицы. Если сопротивление среды достаточно слабое $\left(\sum_i \mu_i p_i < 2\omega\right)$, то $\lim_{t\to\infty} MX(t) = 0$,

$$\lim_{t\to\infty} MY(t) = \frac{1}{\omega^2}\sum_i \mu_i p_i v_i,\ \lim_{t\to\infty} \operatorname{cov} X(t)Y(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} DX(t) = \frac{1}{4\lambda'}\sum_i \mu_i p_i^2 v_i^2,\ \lim_{t\to\infty} DY(t) =$$

$$= \frac{1}{4\lambda'\omega^2}\sum_i \mu_i p_i^2 v_i^2,$$

где $\lambda' = \frac{1}{2}\sum_i \mu_i p_i - \sum_i \frac{\mu_i p_i^2}{4}$.

Примечание референта. На стр. 52 вместо $v_{22} = v_{11}/2$ должно быть $v_{22} = v_{11}/\omega^2$. В. П. Чистяков

**1 В22. Асимптотический анализ вероятности поглощения в одномерной схеме случайных блужданий с решетчатым распределением вероятностей перехода.** Королюк В. С. Асимптотичний аналіз імовірності вбирання в одномірній схемі випадкових блукань з решітчастим розподілом імовірностей переходу. «Доповіді АН УРСР», 1959, № 7, 702—707 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается схема одномерного случайного блуждания с решетчатым распределением вероятностей перехода $p_k$ ($-m \leqslant k \leqslant n$; $m, n$ — целые числа) из точки $x$ в точку $x + k\varepsilon$. Вероятность остаться в точке $x$, для удобства представляется в виде $1 + p_0 (p_0 < 0)$. Пусть $u_\varepsilon(x)$ — вероятность, выходя из точки $x$, попасть в область $x > 0$, не попадая в область $x \geqslant 1$. Тогда $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет следующему разностному уравнению

$$P_\varepsilon u_\varepsilon(x) = \sum_{k=-m}^{n} p_k u_\varepsilon(x + k\varepsilon) = 0$$

$$\left(\sum_{k=-m}^{n} p_k = 0\right) \qquad (1)$$

с граничными условиями: $u_\varepsilon(r\varepsilon) = 1$ при $-m+1 \leqslant r \leqslant 0$, $u_\varepsilon(1 + k\varepsilon) = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Используя разложение оператора $P_\varepsilon$, автор выводит, что $u_\varepsilon(x)$ при малых $\varepsilon$ может быть асимптотически представлена в виде

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \{u_k(x) + \varepsilon[v_k(x) + w_k(x)]\} + \varepsilon^{N+1} y_{N+1},$$

где $u_k(x)$ ($k \geqslant 0$) удовлетворяют рекуррентной системе дифференциальных уравнений, получающейся из (1), с некоторыми граничными условиями и ограничены на $[0, 1]$, $v_k(x)$ и $w_k(x)$ — функции пограничного слоя для (1) соответственно в точках $x = 0$ и $x = 1$, $y_{N+1}$ — функция на $[0, 1]$, ограниченная равномерно и стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$. С. В. Ефремов

**1 В23. Полумартингалы с убывающей базой.** Krickeberg Klaus. Semi-martingales à base filtrante décroissante. Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS, 1959, 133—138. Discuss., 138 (франц.)

Автор изучает поведение мартингалов и полумартингалов $f_\sigma$, $\mathfrak{B}_\sigma$ при убывании $\sigma$, где индекс $\sigma$ принадлежит некоторому упорядоченному множеству $\theta$. Доказывается, что если $\int |f_\rho| d\mu < \infty$ для некоторого $\rho \in \theta$, то существует функция $f$, измеримая относительно $\sigma$-алгебры $\mathfrak{B}_{-\infty} = \bigcap \mathfrak{B}_\sigma$ и такая, что $f_\sigma$ сходится к $f_{-\infty}$ стохастически. Если же $|\int f_\rho\, d\mu| < \infty$, то $f_\sigma \to f_{-\infty}$ в $L^1$. Аналогичное утверждение имеет место для сходимости в $L^p$. Для доказательства более сильного утверждения о сходимости в существенном от базы $\mathfrak{B}_\sigma$ требуется выполнение условия Витали (РЖМат, 1958, 5921) или его обобщения. И. В. Гирсанов

**1 В24. Составные распределения Пуассона.** Bílý Josef. Složená Poissonova rozložení. «Časop. pěstov. mat.», 1959, 84, № 4, 424—432 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассматривается неоднородный ветвящийся случайный процесс с дискретным временем и с одним типом частиц, для которого $P_{1,k}(r-1, r) = \frac{1}{k!} e_\kappa^{-\alpha} r_\alpha^k$, где $P_{l,k}(s, t)$ означает, как правило, вероятность перехода процесса ($l, k$ — состояния, $s, t$ — моменты времени). При помощи полиномов Стеффенсена вычисляется вероятность $P_{1,k}(0, 2)$ и вводятся обобщенные полиномы Стеффенсена, при помощи которых можно было бы вычислять $P_{1,k}(v, t)$ для $t > 2$. M. Jiřina

**1 В25. Цепь Маркова, приводящая к свертке биномиальных распределений и к биномиальному распределению.** Bílý Josef. Markovův řetězec vedoucí ke konvoluci binomických rozložení a ke kumulovanému binomickému rozložení. «Časop. pěstov. mat.», 1959, 84, № 3, 327—334 (чешск.; рез. русск., нем.)

Приводятся примеры двух однородных цепей Маркова с конечным числом состояний, которые описывают процессы восстановления и которые можно реализировать с помощью урновой схемы. После того, как автор убедился, что изучаемые цепи имеют необходимые свойства регулярности, он приводит финальные распределения вероятностей. В зависимости от параметров этих цепей находятся выражения для финальных распределений. Автор также выводит производящие функции моментов и моменты первых двух порядков. P. Mandl

**1 В26. Условия эргодичности неоднородных конечных цепей Маркова.** Mott J. L. Conditions for the ergodicity of non-homogeneous finite Markov chains. «Proc. Roy. Soc. Edinburgh», 1957, **A64**, № 4, 369—380 (англ.)

Рассматривается неоднородная марковская цепь с конечным множеством состояний и матрицами вероятностей перехода на $k$-м шагу $P_k = \|_k p_{ij}\|$. Через $P^{(n)} = \|p_{ij}^{(n)}\|$ обозначается матрица вероятностей перехода за $n$ шагов. Автор называет цепь слабо эргодической, если $p_{ij}^{(n)} - p_{kj}^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $i, k, j$, и сильно эргодической, если, помимо указанного условия, существует предел $S = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}$. Для слабой эргодичности цепи достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(1 - f_j) = 0$, где $f_j = \max_t \{\min_j p_{st}\}$. Обозначим через $a_{i,j}^{(k,n)}$ элементы матрицы $P_k P_{k+1} \ldots P_n$ и положим $r_{k,n} = \max_{i,j,l} |a_{i,l}^{(k,n)} - a_{j,l}^{(k,n)}|$. Если у некоторой стохастической матрицы $S$ все элементы любого столбца равны между собой, то для того чтобы $P^{(n)} \to S$, достаточно выполнения любой пары условий: 1) ряд $\sum_{j=1}^{\infty}(SP_j - S)$ сходится абсолютно (т. е.) абсолютно сходятся соответствующие ряды из элементов матриц $SP_j - S$); 2) $r_{i,n} \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $i$; или 1') $SP_n - S \to 0$ при $n \to \infty$; 2') $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=i}^{n} r_{j,n} < \infty$ для всех $i$. М. Г. Шур

**1 В27. К энтропии цепей Маркова.** Амбарцумян Г. А. «Айкакан ССР Гитутюннери Академиан тегекагир. Физико-математикакан гитутюннери сериа. Изв. АН АрмССР. Сер. физ-матем. н.», 1958, **11**, № 2, 31—40 (рез. арм.)

Вводятся различные определения энтропии сложной цепи Маркова (одношаговая энтропия, осредненная од-

ношаговая энтропия и многошаговая энтропия) и устанавливается связь между этими определениями. Дается обобщение на сложные цепи Маркова предельной теоремы Хинчина (РЖМат, 1954, 3771).

А. А. Филиппова

**1 В28. Обобщение обратного уравнения Колмогорова.** Austin D. G. The generalized backward Kolmogorov equation in abstract space. «Illinois J. Math.», 1959, 3, № 4, 532—537 (англ.)

Дается обобщение результатов, известных для переходных вероятностей непрерывного марковского процесса со счетным числом состояний, на тот случай, когда пространство состояний есть некоторое абстрактное пространство. Рассматриваются только стационарные марковские цепи. Пусть $(\mathfrak{F}, X)$ обозначает абстрактное пространство $X$ с борелевским полем подмножеств, $\mathfrak{F}$, содержащим $X$ и все одноточечные подмножества. $P_t(x, E)$ для $t \geqslant 0$, $x \in X$ и $E \subset \mathfrak{F}$ определяет вероятность того, что процесс, находясь в момент времени $\tau$ в состоянии $x$, ко времени $\tau + t$ перейдет в любое из состояний множества $E$ (в силу стационарности эти вероятности не зависят от $\tau$). Предполагается, что выполнены следующие условия:

I. $P_t(x, \cdot)$ является вероятностной мерой на $\mathfrak{F}$;

II. $P_t(\cdot, E)$ — $\mathfrak{F}$-измеримая функция;

III. $P_{t+s}(x, E) = \int_X P_t(\cdot, E)\, dP_s(x, \cdot)$;

IV. $\lim\limits_{t \to 0+0} P_t(x, \{x\}) = 1 = P_0(x, \{x\})$;

V. $P_t(x, \{x\})$ для каждого $t$ $\mathfrak{F}$-измеримая функция, $x \in X$. Кэндалл (РЖМат, 1959, 9291) показал, что V удовлетворено, например, когда $\mathfrak{F}$ состоит из открытых множеств с хаусдорфовой топологией, удовлетворяющих второй аксиоме счетности. Основной результат статьи состоит в том, что если справедливы приведенные выше условия и существует хотя бы одна точка $x = x^*$ такая, что

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{1 - P_t(x^*, \{x\})}{t} < \infty,$$

то имеет место Теорема 1. Производная $P'_t(x^*, E)$ существует для $t > 0$ и $E \subset \mathfrak{F}$; $P'_t(x^*, \cdot)$ равномерно ограниченная однозначная мера на $\mathfrak{F}$, которая удовлетворяет уравнению

$$P'_{t+s}(x^*, E) = \int_X P_s(\cdot, E)\, dP'_t(x^*, \cdot).$$

Из теоремы 2: Если $P'_t(x^*, E)$ существует при $t = 0$ для всех $E \subset \mathfrak{F}$, то

$$P'_t(x^*, E) = \int_X P_t(\cdot, E)\, dP'_0(x^*, \cdot)$$

для всех $t \geqslant 0$, — немедленно получается обратное уравнение Колмогорова.

В. А. Маковский

**1 В29. Эргодическое свойство $N$-мерных возвратных марковских процессов.** Maruyama Gisiro, Tanaka Hiroshi. Ergodic property of $N$-dimensional recurrent Markov processes. «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.», 1959, A13, № 2, 157—172 (англ.)

Изучается однородный по времени возвратный строго марковский процесс $X(t)$ с непрерывными справа траекториями в $N$-мерном евклидовом пространстве $R^N$. Пусть $P(t, a, E)$ — переходная вероятность этого процесса. При некоторых дополнительных предположениях для такого процесса установлены существование и единственность инвариантной меры $m(E)$, т. е. такой меры, что $\int_{R^N} P(t, a, E)\, m(da) = m(E)$ для всех $E$, принадлежащих борелевскому полю подмножеств из $R^N$. При тех же предположениях установлено, что

$$P_a\left\{\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t f(X(s))\, ds}{\int_0^t g(X(s))\, ds} = \frac{\int f dm}{\int g dm}\right\} = 1,$$

если $f$ и $g$ интегрируемы относительно $m$, функции $|f(X(t))|$ и $|g(X(t))|$ с вероятностью единица интегрируемы по $t$, а $\int g dm \neq 0$. Указывается, что все предположения работы выполнены, в частности, для броуновского движения на плоскости и одномерного симметричного устойчивого процесса с показателем $\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Р. З. Хасьминский

**1 В30. О регулярных и сингулярных стационарных обобщенных случайных процессах.** Cheng Shaw-lian. On the regular and singular stationary generalized stochastic processes. «Sci. Rec.», 1959, 3, № 8, 352—358 (англ.)

Рассматриваются обобщенные случайные стационарные процессы, являющиеся обобщенным пределом непрерывных стационарных случайных процессов. Обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ сингулярен, если при любом $\tau > 0$ процесс $\Phi(\omega, t + \tau)$ принадлежит к линейному замыканию (в смысле обобщенной сходимости) совокупности процессов $\Phi(\omega, t + u)$, $u \leqslant 0$. Доказана теорема: Процесс $\Phi(\omega, t)$ сингулярен тогда и только тогда, если $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2}\, d\lambda = -\infty$, где $f(\lambda)$ — производная спектральной функции процесса $\Phi(\omega, t)$. Доказано, что регулярные процессы, т. е. процессы, обладающие абсолютно непрерывной спектральной функцией $F(\lambda)$, удовлетворяющей условию $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log F'(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty$, и только они, представимы в виде $\Phi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\lambda} a(t - \lambda)\, \Psi(\omega, \lambda)\, d\lambda$, где $a(t)$ — некоторая обобщенная функция и $\Psi(\omega, t)$ — белый шум.

K. Urbanik

**1 В31. К экстраполяции обобщенных случайных стационарных процессов.** Розанов Ю. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, 4, № 4, 465—471 (рез. англ.)

Рассматриваются обобщенные случайные стационарные процессы, т. е. случайные линейные функционалы $\xi(\varphi)$, определенные в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторого интервала, такие, что математическое ожидание и корреляционный функционал инвариантны относительно сдвига функций. Пусть $H$ — линейное замыкание случайных величин $\xi(\varphi)$ в смысле среднего квадратичного расстояния. Пусть $H_s$ — подпространство, отвечающее функциям $\varphi$, таким, что $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant s$. Процесс $\xi(\varphi)$ сингулярен, если $H = \bigcap_s H_s$. Доказана теорема: Процесс $\xi(\varphi)$ сингулярен тогда и только тогда, если $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2} = -\infty$, где $f(\lambda)$ — производная спектральной функции процесса $\xi(\varphi)$. Процесс называется регулярным, если его спектральная функция абсолютно непрерывна и, кроме того, спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty$. Пусть $h_s(\varphi)$ — проекция $\xi(\varphi)$ на подпространство $H_s$, т. е. $h_s(\varphi)$ — прогноз значения $\xi(\varphi)$ по известным значениям процесса до момента времени $s$.

Доказана теорема: Пусть $\xi(\varphi)$ — регулярный процесс и $\Phi(\Delta)$ — отвечающая ему случайная спектральная мера. Тогда прогноз $h_s(\varphi)$ представим в виде

$$h_s(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\lambda)\, \Phi(d\lambda),$$

где

$$\psi_s(\lambda)\, \alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{s} e^{i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu t}\, \widetilde{\varphi}(\mu)\, \alpha(\mu)\, d\mu dt,$$

$\widetilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции $\varphi$, а $\alpha(\lambda)$ есть граничное значение аналитической в нижней полуплоскости функции $\alpha(\zeta)$,

$$\alpha(\zeta) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\mu)}{1+\mu^2} \frac{1+\mu\zeta}{\zeta-\mu}\, d\mu.$$

K. Urbanik

**1 В32. О мере гильбертовых окрестностей для процессов со стационарными независимыми приращениями.** Baxter Glen. On the measure of Hilbert neighborhoods for processes with stationary, independent increments. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1959, **10**, № 5, 690—695 (англ.)

Устанавливаются следующие две теоремы: (А). Если $\{x(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ — сепарабельный случайный процесс со стационарными независимыми приращениями, для которого $x(0) = 0$ и если

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-st} M\{\exp[-u \int_0^t x^2(\tau)\, d\tau + i\xi x(t)]\}\, dt,$$

то

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(x, \xi)\, dx,$$

где $\widetilde{\varphi}(\xi) \equiv \widetilde{\varphi}(x, \xi)$ — единственное решение уравнения

$$u\widetilde{\varphi}'' - [s + \psi(x)]\widetilde{\varphi} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее следующим условиям: $\widetilde{\varphi} \to 0$, когда $x \to \pm\infty$; $\widetilde{\varphi}$ — непрерывная для всех $x$; $\widetilde{\varphi}'$ — непрерывна для всех $x$, исключая $x = \xi$, $\lim\limits_{x\to\xi-0} \widetilde{\varphi}' - \lim\limits_{x\to\xi+0} \widetilde{\varphi}' = \frac{1}{u}$. Иными словами $\widetilde{\varphi}(x, \xi)$ — функция Грина уравнения (1) с условием $\widetilde{\varphi} \to 0$, если $x \to \pm\infty$. (В). Если $\{x(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ — сепарабельный процесс со стационарными независимыми приращениями, для которого $x(0) = 0$ и если $M\{x^2(t)\}$ существует для всех $t$ и имеет конечное преобразование Лапласа, тогда $\varphi(\xi)$, введенное в теореме (А), удовлетворяет уравнению $u\varphi''(\xi) - [s + \psi(\xi)]\varphi(\xi) = -1$. В формулировке теорем (А) и (В) функция $\psi(\xi)$ представляется формулой Леви — Хинчина:

$$\psi(\xi) = -i\gamma\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i\xi u} - 1 - \frac{i\xi u}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u),$$

где $G(u)$ — ограниченная неубывающая функция, $G(-\infty) = 0$; $\gamma$ — действительное число. Автор иллюстрирует применение теорем (А) и (В) для вычисления $\varphi(0)$ на примере процесса Коши, когда $\psi(x) = |x|$, и на примере пуассоновского процесса, т. е. для случая $\psi(x) = a(1 - \exp ix)$. В. А. Маковский

**1 В33. Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов.** Беляев Ю. К. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 1, 128—131 (рез. англ.)

Формулируется несколько теорем относительно локального поведения выборочных функций сепарабельного стационарного гауссовского процесса $\xi(t)$, в частности уточняется одна альтернатива, доказанная Добрушиным (РЖМат, 1960, 14122): либо с вероятностью 1 выборочные функции гауссовского стационарного процесса непрерывны, либо с вероятностью 1 они не ограничены на любом интервале. В своей заметке автор выписывает различные условия, достаточные для непрерывности или для неограниченности выборочных функций. Например, если корреляционная функция $B(t)$ процесса $\xi(t)$ удовлетворяет при достаточно малых $h$ условию $B(0) - B(h) \leqslant \frac{C}{|\ln|h||^{\alpha}}$, где $\alpha > 1$, то выборочные функции процесса $\xi(t)$ непрерывны с вероятностью 1; если же $B(0) - B(h) \geqslant \frac{C}{|\ln|h||}$, то выборочные функции не ограничены с вероятностью 1 на любом интервале. Кроме того, в заметке формулируются теоремы о том, когда выборочные функции процесса $\xi(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, дифференцируемы или аналитичны. Ю. А. Розанов

**1 В34. Суммы стационарных случайных величин.** Robinson Enders A. Sums of stationary random variables. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1960, **11**, № 1, 77—79 (англ.)

Изучается поведение дисперсий сумм $\sum_1^n x(t)$ значений стационарного процесса $x(t)$ с дискретным временем $t$. Автор доказывает, что эти дисперсии остаются ограниченными при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \lambda}\, dF(\lambda) < \infty$, где $F(\lambda)$ есть спектральная функция процесса $x(t)$, причем в этом случае существует стационарный процесс $y(t)$, стационарно связанный с процессом $x(t)$, такой, что $x(t) = y(t+1) - y(t)$. Ю. А. Розанов

**1 В35. Условия, обеспечивающие эргодичность стационарного процесса.** Parzen Emanuel. Conditions that a stochastic process be ergodic. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 1, 299—301 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — стационарная в узком смысле случайная последовательность и $\varphi_{t_1,\ldots,t_k}(u_1, \ldots, u_k)$ — характеристическая функция случайного вектора $\{X(t_1), \ldots, X(t_k)\}$, а $\varphi_{t_1,\ldots,t_k}(u_1, \ldots, u_k; \tau)$ — характеристическая функция вектора

$$\{X(t_1) - X(t_1 + \tau), \ldots, X(t_k) - X(t_k + \tau)\}.$$

В таком случае для того, чтобы последовательность $X(t)$ была метрически транзитивной, необходимо и достаточно, чтобы для любого целого положительного числа $k$, любых $k$ целых чисел $t_1, \ldots, t_k$ и любых $k$ вещественных чисел $u_1, \ldots, u_k$ имело место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\tau=0}^{n} \varphi_{t_1,\ldots,t_k}(u_1, \ldots, u_k; \tau) = |\varphi_{t_1,\ldots,t_k}(u_1, \ldots, u_k)|^2.$$

Отмечается, что из этой теоремы, в частности, легко можно вывести известное утверждение о том, что в случае нормальной (гауссовской) стационарной последовательности $X(t)$ для метрической транзитивности необходима и достаточна непрерывность соответствующей спектральной функции $F(\lambda)$. А. М. Яглом

**1 В36. Новый тип согласующего фильтра.** Debart H. P. A new kind of matched filter. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 14—29 (англ.)

Пусть $f(\omega, u, v, \ldots, z)$ ($\omega$ — частота; $u, v, \ldots, z$ — параметры) — энергетический спектр сигнала на входе некоторого линейного фильтра, квадрат модуля которого есть $\varphi(\omega)$. Считается, что функция $f(\omega, u, v, \ldots, z)$ нормирована $\int_0^{\infty} f(\omega, u, v, \ldots, z)\, d\omega = 1$. Фильтр (т. е. функция $\varphi(\omega)$), который рассматривается в работе, определяется интегральным уравнением

$$\int_0^\infty f(\omega, u, v, \ldots, z)\,\varphi(\omega)\,d\omega = F(u, v, \ldots, z), \quad (1)$$

где $F(u, v, \ldots, z)$ — некоторая заданная функция. Для получения обычной фильтрации необходимо, чтобы функция $F(u, v, \ldots, z)$ была близка к единице в некоторой области $D_0$, являющейся окрестностью точки $(u_0, v_0, \ldots, z_0)$ и приблизительно равнялась нулю во всей остальной области переменных $u, v, \ldots, z$. По определению считается, что частоты $\omega$, для которых $\int_0^\infty f(\omega, u, v, \ldots, z)\,\varphi(\omega)d\omega < \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданное число ($\varepsilon < 1$), не пропускаются фильтром. Для того чтобы рассматриваемый фильтр существовал, требуется, чтобы существовало неотрицательное (для $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$) решение уравнения (1), удовлетворяющее условию Палея — Винера

$$\int_0^\infty \frac{\log \varphi(\omega)}{\omega^2 + 1}\,d\omega < \infty.$$

Отмечается, что в случае, когда подаваемый на фильтр сигнал является случайным стационарным процессом, функция $f(\omega, u, v, \ldots, z)$ имеет смысл его спектральной плотности. Приводятся примеры вычисления $\varphi(\omega)$ для конкретных $f(\omega, u)$ и $F(u)$. Б. С. Цыбаков

**1 В37. Обобщение теоремы Гливенко—Кантелли.** Tucker Howard G. A generalization of the Glivenko—Cantelli theorem. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 3, 828—830 (англ.)

На случай стационарной в узком смысле последовательности наблюдений обобщается теорема Гливенко — Кантелли о равномерной сходимости с вероятностью единица последовательности эмпирических функций распределения к теоретическому распределению.

В. С. Королюк

**1 В38. Новый вывод функции, задающей информацию.** Tverberg Helge. A new derivation of the information function. «Math. scand.», 1958, **6**, № 2, 297—298 (англ.)

Анализируя аксиоматическое задание энтропии распределения вероятностей, намеченное в основополагающей для теории информации статье Шеннона, А. Я. Хинчин (РЖМат, 1954, 3771) доказал следующую теорему: Функция $H(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что: а) она определена для всех неотрицательных значений $x_1, \ldots, x_n$ с $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ и является симметрической функцией своих аргументов,

б) $H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = H(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) + (x_n + x_{n+1})\,H\left(\frac{x_n}{x_n + x_{n+1}}, \frac{x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}\right)$,

в) $H(x_1, \ldots, x_n)$ является непрерывной функцией своих аргументов и при этом $H(x_1, \ldots, x_n) \leqslant H\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ при всех $x_1, \ldots, x_n$, обязательно имеет вид:

$$H(x_1, \ldots, x_n) = -c \sum_{i=1}^n x_i \log x_i,\ c > 0.$$

В дальнейшем Д. К. Фадеев (РЖМат, 1958, 524) показал, что в условии в) вполне можно опустить вторую часть; достаточно лишь потребовать непрерывности функции $H(x_1, \ldots, x_n)$. В этой связи показывается, что условие в) можно ослабить еще больше: оказывается, что теорема сохраняется, если в качестве третьего условия в) потребовать лишь, чтобы функция $H(x, 1-x)$ была интегрируемой по Лебегу на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$. А. М. Яглом

**1 В39. Энтропия стохастических процессов.** Розенблатт-Рот М. «Докл. АН СССР», 1957, **112**, № 1, 16—19

Пусть задана последовательность измеримых пространств с мерами $(A_t, F_t, \mu_t)$, $t = 0, \pm 1, \ldots$ Рассмотрим случайный процесс $X = \{x_t\}$, где $x_t \in A_t$, и предположим заданными плотности $p^{(t,t+n)}$ (по мерам $\mu_t \times \ldots \times \mu_{t+n}$) цепочек $x^{(t,t+n)} = (x_t, \ldots, x_{t+n})$. Вероятностное поле, индуцированное этими цепочками, обозначим $X^{(t,t+n)}$. Энтропию произвольного случайного поля $B$ будем обозначать $H(B)$. Энтропией процесса $X$ в момент $t$ называется величина $H_t(X) = \lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1} H(X^{(t,t+n)})$, если этот предел существует. Для его существования необходима и достаточна суммируемость по Чезаро условных энтропий $H(X^{(t,t+n)} \mid X^{(t,t+n-1)})$. Устанавливается, что предел (конечный или бесконечный)

$$\widetilde{H}_t^{(m)}(X) = \lim_{n\to\infty} H(X^{(t,t+m-1)} \mid X^{(t+m,t+n)})$$

существует всегда. Ниже всюду предполагается, что $\widetilde{H}_t^{(m)}(X) \neq \infty$ ни при каких $t$ и $m$. При этом оказывается, что для процесса с дискретным множеством состояний энтропия (если она существует) не зависит от $t$. Для стационарного процесса энтропия (конечная или бесконечная) существует всегда. Пусть

$$x = (\ldots x_t, \ldots, x_{t+n} \ldots) \text{ и } f^{(t,t+n)}(x) = -(n+1)^{-1} \log p^{(t,t+n)}(x^{(t,t+n)}).$$

Для того чтобы величина $f^{(t,t+n)}(x)$ стремилась по вероятности к $H_t(X)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность случайных величин ($n \geqslant 1$)

$$g^{(t,t+n)} = -\log\{p^{(t,t+n)}(x^{(t,t+n)})/p^{(t,t+n-1)}(x^{(t,t+n-1)})\}$$

подчинялась закону больших чисел. Устанавливается, что последовательность $f^{(t,t+n)}(x)$ не может сходиться в среднем (в пространстве $L_1$) к константе, отличной от $H_t(X)$, а в случае $H_t(X) = \infty$ не может сходиться в среднем ни к одной функции из $L_1$. В статье рассмотрены также некоторые другие свойства энтропии, а также вопросы, связанные с теорией кодирования. Доказательства не приведены. М. Г. Шур

**1 В40. О размерности и энтропии распределения вероятностей.** Rényi A. On the dimension and entropy of probability distributions. «Acta math. Acad. scient. hung.», 1959, **10**, № 1-2, 193—215 (англ.; рез. русск.)

Размерность $d(\xi)$ и $d$-мерная энтропия $H_d(\xi)$ случайной величины $\xi$ с функцией распределения $F(x)$ (иначе — размерность и $d$-мерная энтропия распределения $F(x)$) определяются следующим образом:

$$d(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\xi_n)}{\log n},$$

$$H_d(\xi) = \lim_{n\to\infty} [H(\xi_n) - d(\xi)\cdot \log n],$$

где $\xi_n = \frac{1}{n}[n\xi]$, $[x]$ — целая часть $x$, а $H(\xi)$ (в случае дискретной случайной величины $\xi$) — обычная энтропия в смысле Шеннона. Если размерность $d(\xi)$ не существует, то определяются верхняя $\overline{d}(\xi)$ и нижняя $\underline{d}(\xi)$ размерности $\xi$:

$$\overline{d}(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{H(\xi_n)}{\log n},\quad \underline{d}(\xi) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{H(\xi_n)}{\log n}.$$

Доказывается, что если только $H([\xi]) < \infty$, то $\overline{d}(\xi)$ и $\underline{d}(\xi)$ всегда существуют, причем $0 \leqslant \underline{d}(\xi) \leqslant \overline{d}(\xi) \leqslant 1$. Приводится пример одномерной случайной величины $\xi$, для которой $\underline{d}(\xi) < \overline{d}(\xi)$; показывается, что для дискретной величины $\xi$ с $H(\xi) < \infty$ обязательно $d(\xi) = 0$ и $H(\xi) = H_0(\xi)$. Далее доказывается, что если $F(x) = (1-d)\cdot F_0(x) + d\cdot F_1(x)$, $0 \leqslant d \leqslant 1$, где $F_0(x)$ — чисто разрывная функция распределения, а $F_1(x)$ —

абсолютно непрерывная функция распределения, то $d(\xi) = d$ при $0 < d < 1$; если к тому же дискретное распределение $F_0(x)$ имеют конечную энтропию $H_0$, а плотность $p(x)$ распределения $F_1(x)$ такова, что

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx < \infty,$$

то

$$H_d(\xi) = (1-d) \cdot H_0 + d \cdot h + d \log \frac{1}{d} + (1-d) \log \frac{1}{1-d},$$

причем последний результат верен и при $d = 0$ или $d = 1$. Частный случай этого результата при $d = 1$ обобщается на абсолютно непрерывные распределения в $s$-мерном евклидовом пространстве; здесь $d(\xi) = s$, а

$$H_s(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(x_1, \dots, x_s) \times$$
$$\times \log p(x_1, \dots, x_s)\, dx_1 \dots dx_s.$$

В связи с вопросом о дальнейшем обобщении полученных результатов на распределения в произвольном метрическом пространстве рассматривается понятие $\varepsilon$-энтропии распределения относительно заданного $\varepsilon$-разбиения пространства, несколько отличающееся от введенного Колмогоровым понятия $\varepsilon$-энтропии (определяющегося безотносительно к какому-либо заданному разбиению); это новое понятие $\varepsilon$-энтропии используется для обобщения понятия размерности распределения вероятностей и исследуется в применении к одномерным абсолютно непрерывным распределениям, сосредоточенным на конечном интервале. А. М. Яглом

**1 В41. Собственные значения случайно распределенных матриц.** Englman R. The eigenvalues of a randomly distributed matrix. «Nuovo cimento», 1958, **10**, № 4, 615—621 (англ.; рез. итал.)

Определяется распределение собственных значений симметричной матрицы, элементы которой являются независимыми случайными величинами с законом распределения, зависящим от расстояния элемента до диагонали матрицы, когда порядок матрицы неограниченно возрастает. Так как задача неразрешима аналитически, автор рассматривает возможность ее решения численными методами и считает, что лучшим численным методом является метод Монте-Карло. Исследование задачи этим методом автор намерен провести в будущем.

В. Я. Евфанов

**1 В42. О случайных интегральных уравнениях Фредгольма с вырожденным ядром.** Bharucha-Reid Albert T. Sur les équations intégrales aléatoires de Fredholm à noyaux séparables. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 3, 454—456 (франц.)

Пусть $x(t, \omega)$ — случайная функция в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, измеримая в $\Omega \times U$, где $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — вероятностное пространство, а $U$ — ограниченное подмножество $k$-мерного евклидова пространства $R_k$ с лебеговой мерой $m$. Изучается случайное интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t, \omega) - \lambda \int_{D_\omega} K(t, u)\, x(u, \omega)\, dm(u) = y(t)$$

(здесь $D_\omega$ — случайная область из $U$, $y(t)$ — неслучайная функция, а ядро $K(t, u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\, \beta_i(u)$, причем функции $\alpha_i$ и $\beta_i$ предполагаются линейно независимыми). Доказано, что решение этого интегрального уравнения эквивалентно решению системы $n$ линейных алгебраических уравнений со случайными коэффициентами. Р. З. Хасьминский

**1 В43. О случайных интегральных уравнениях Фредгольма с вырожденным ядром.** Bharucha-Reid Albert T. Sur les équations intégrales aléatoires de Fredholm à noyaux séparables. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 4, 657—658 (франц.)

Доказано, что система уравнений

$$\gamma_j(\omega) - \lambda \sum a_{ij}(\omega)\, \gamma_i(\omega) = b_i(\omega) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

к которой сводится случайное интегральное уравнение Фредгольма (реф. 1В42), имеет единственное решение, если $|\lambda| < \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(\omega)|\right]^{-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Это решение может быть получено методом последовательных приближений. Р. З. Хасьминский

**1 В44. Стохастическая аппроксимация.** Fabius J. Stochastische Approximatie. «Statist. neerl.», 1959, **13**, № 4, 445—452 (гол.; рез. англ.)

**1 В45. О специальном классе стохастических проблем.** Grabiel Federico. A special class of stochastic problems. «Boll. Centro ricerca operat.», 1958, № 7-8, 10—13 (англ.)

**1 В46. О распределении нелинейных круговых преобразований марковского процесса.** Deutsch Ralph. On the distribution of nonlinear circuit transformations of a Markov process. «Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis. (1956, New York, N. Y.). Brooklyn, N. Y., Polytechn. Inst. Brooklyn», 1957, 243—253 (англ.)

**1 В47. Заметки об основах теории вероятностей. Албукерки.** Albuquerque L. Notas sobre os fundamentos do cálculo das probabilidades. «Gaz. mat.», 1959, **20**, № 74-75, 26—34 (порт.)

**1 В48. Энтропия функций на цепи Маркова с конечным числом состояний.** Блекуэлл Дэвид (Blackwell D.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1959, **3**, № 5, 143—150

Перевод из журнала Trans. 1-st Prague Conf. Inform. Theory, Czechosl. Acad. Sci., Prague, 1957, 13—20

**1 В49. Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов.** Ито Киоси (Ito K.), Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1959, **3**, № 5, 131—141

Перевод из журнала «Nagoya Math. J.», 1951, 3, 55—65

**1 В50. Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения.** Маруяма Гисиро (Maruyama G.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1957, **1**, № 2, 125—159

Перевод с английского (РЖМат, 1959, 4058)

**1 В51. Одномерные диффузионные процессы.** Феллер Вильям (Feller W.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1958, **2**, № 2, 119—146

Перевод с английского (РЖМат, 1958, 522).

**1 В52. О стохастических дифференциальных уравнениях.** Ито Киоси (Ito K.), «Математика. Период сб. перев. ин. статей», 1957, **1**, № 1, 78—116

Перевод из журнала Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 4.

**1 В53 К. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел.** Kac Mark. Statistical independence in probability, analysis and number theory. New York, Math. Assoc. America; John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1959, xiv, 93 pp., 24 sh., «Brit. Nat Bibliogr.», 1960, № 526, 12 (англ.)

**1 В54 К. Элементы информационного исчисления.** Cullmann G., Denis-Papin M., Kaufmann L. Eléments de calcul informationnel. Paris, Eds Albin Michel, 1960, 124 p., ill., 1200 fr. (франц.)

Изложение основ теории информации для читателей с малой математической подготовкой. Первые три главы содержат вспомогательные сведения из элементарной алгебры, теории вероятностей и статистики. В гл. IV описываются основные понятия теории информации. Изложение ведется в плане первой работы Шеннона. В гл. V содержится описание кодов с обнаружением и исправлением ошибок. Подробно рассматриваются коды с обнаружением одиночной ошибки, исправлением одиночной ошибки, исправлением одиночной и обнаружением двойной ошибок. Гл. VI носит описательный характер.

Л. Я. Савельев

**1 В55 Д. Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов.** Беляев Ю. К.— Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**1 В56. Таблица перетасованных четырехзначных чисел.** Steinhaus Hugo. Tablica liczb przetasowanych czterocyfrowych. «Rozpr. mat.», 1954, № 6, 46 s. (польск., русск., англ.)

Из последовательности, образованной четырьмя последними цифрами элементов последовательности 4567 $n$, $n = 0,1,...,$ 9999 и включающей все четырехзначные числа от 0000 до 9999, шестикратной перетасовкой по различным правилам построена таблица. Чтение таблицы по горизонталям соответствует выбору без возвращения, чтение по вертикалям — выбору с возвращением. Таким образом, чтение таблицы по вертикалям соответствует таблице случайных чисел. В обоих случаях возможно получение трех-, четырех-, пяти- и шестиразрядных чисел. Максимальный допустимый объем выборки при получении трехзначных чисел равен 1000, в остальных случаях — 10 000. Дается описание построения таблицы и правил пользования ею. В. А. Михайлов

**1 В57. Численное рассмотрение расслоения величин, подчиненных логарифмически нормальному распределению.** Block Eskil. Numerical considerations for the stratification of variables following a logarithmic normal distribution. «Skand. aktuarietidskr.», 1958 (1959), № 3-4, 185—200 (англ.)

Работа посвящена численному решению следующей проблемы, поставленной Далениусом (Dalenius): Действительную прямую надо разделить на $k$ непересекающихся интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ так, чтобы выражение $\sum_{i=1}^{k} P(x \in \Delta_i) \sqrt{D(y \mid x \in \Delta_i)}$ было минимальным для определенного заданного двумерного распределения величин $(x, y)$. Символ $P(\cdot)$ здесь означает вероятность, а $D(\cdot)$ — условную дисперсию. Автор дает численное решение этой задачи для $k = 2, 3, 4$ и для двумерного логарифмически нормального распределения с параметрами $(l_1, \sigma_1 r, l_2, \sigma_2)$, где индекс 1 относится к величине $x$, индекс 2 — к величине $y$. Решение представлено в виде таблицы соответственно различным значениям величин $r$ и $\sigma_2$. Также рассматривается случай, когда надо минимизировать более сложное выражение, соответствующее расслоенному отбору, причем выборочная совокупность образует основательную часть (скажем 10%) основной совокупности. В довольно широких предположениях можно решение записать в виде $\log x_i = l_1 + \sigma_1 (H_i + r\sigma_2)$, где $x_i$ — точки деления интервалов $\Delta_i$, и для $k = 2$ имеем $H = 0$, для $k = 3$ имеем $H_i = \pm 0{,}63$ и для $k = 4$ $H_i = \pm 1$ и $0$.

J. Hájek

**1 В58. Рекуррентные формулы для среднего размаха для нечетных объемов выборки.** Carlson Phillip G. A recurrence formula for the mean range for odd sample sizes. «Skand. aktuarietidskr.», 1958 (1959), № 1-2, 55—56 (англ.)

Пусть $\omega_k$ — разность между наибольшим и наименьшим наблюдением в последовательности $k$ одинаково распределенных и независимых наблюдений. Пусть $E\omega_k$ — среднее значение $\omega_k$. Доказано, что справедлива формула $E\omega_{2n+1} = (2n+1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n+i-1}}{n+i+1} \times E\omega_{n+i+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

J. Hájek

**1 В59. О суммах независимых случайных величин, распределенных по закону Пирсона типа V.** Higuti Isao. Note on the sums of the independent variates of K. Pearson's type V. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, 8, № 1, 55—59 (англ.)

Функция плотности распределения Пирсона типа V имеет вид

$$f(x, \lambda, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{-(\lambda+1)} \exp\left\{-\frac{\gamma}{x}\right\} & \text{для } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{для } x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Преобразование Лапласа функции (1) в случае $\lambda = s + 1/2$ для $s = 0, 1, 2, \ldots$ может быть представлено в виде

$$\varphi(\alpha;\ s+1/2,\ \gamma) = \frac{(-1)^s 2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s+1/2)} \times \times \left[\frac{d^s}{dp^s} \frac{\exp\{-2\sqrt{\gamma \cdot \alpha}\, p\}}{(1+p)^{s+1}}\right]_{p=1}. \quad (2)$$

Из (2) легко получить точное выражение плотности для суммы независимых случайных величин, функции плотности которых есть $f(x; s_i + 1/2, \gamma_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Автор выдвигает в качестве гипотезы два предположения, в случае справедливости которых функции плотности величины $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\gamma_i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i$, где $X_i$ независимы и имеют плотности $f(x, s_i + 1/2, \gamma_i)$, может быть представлена как некоторая взвешенная сумма плотностей Пирсона типа V. Л. Н. Куцев

**1 В60. О моментах следа матрицы и аппроксимации распределения следа.** Pillai K. C., S., Mijares Tito A. On the moments of the trace of a matrix and approximations to its distribution. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 1135—1140 (англ.)

В проблемах многомерного анализа приходится сталкиваться с вопросом распределения корней матриц, полученных из выборочных наблюдений. В статье рассматриваются первые четыре момента суммы $S$ ненулевых корней матрицы, где совместное распределение $S$ ненулевых корней записывается в виде

$$0(\theta_1, \ldots, \theta_s) = C(s, m, n) \prod_{i=1}^{s} \theta_i^m (1-\theta_i)^n \prod_{i>j} (\theta_i - \theta_j),$$

$f \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_s < 1$, где

$$C(s, m, n) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} \prod_{i=1}^{s} \Gamma\left(\frac{2m+2n+s+i+2}{2}\right)}{\prod_{i=1}^{s} \Gamma\left(\frac{2m+i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n+i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i}{2}\right)}.$$

Пиллаи изучал распределение статистики $V^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \theta_i$, им получены первые три момента и четвертый момент для $S = 2, 3, 4$ и предложена аппроксимация к распределению $V^{(s)}$ с помощью неполных бета-функций. Работа посвящена получению четвертого момента. С помощью записи предыдущего выражения в детерминантной форме получается производящая функция моментов суммы $S$ ненулевых корней и путем последовательного дифференцирования и последующих преобразований выписываются нужные моменты. В. И. Бабкин

**1 В61. Обобщенные средние разности (типа Джини) при биномиальном и пуассоновом распределениях.** Ramasubban T. A. The generalized mean differences of the binomial and Poisson distributions. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 223—229 (англ.)

**1 В62. Совместное асимптотическое распределение $U$-статистик и порядковых статистик.** Sethuraman J., Sukhatme B. V. Joint asymptotic distribution of $U$-statistics and order statistics. «Proc. 46th Indian Sci. Congr. Assoc.», Dehli, 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 5—6 (англ.)

**1 В63. О существовании наилучшей аппроксимации одной функции распределения другими данного типа.**

Burkholder D. L. On the existence of a best approximation of one distribution function by another of a given type. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 3, 738—742 (англ.)

Для двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ рассматривается $\sup_{-\infty<x<+\infty} |F(ax+b)-G(x)| = M(a, b)$ ($a>0$). Указаны достаточные условия (теоремы 1 и 2) для существования пары чисел $(a_0, b_0)$ таких, что $\sup_{-\infty<x<+\infty} |F(a_0x+b_0)-G(x)| = \inf_{\substack{0<a<+\infty \\ -\infty<b<+\infty}} M(a, b)$. Приведен пример, когда такой пары $(a_0, b_0)$, на которой достигается нижняя грань $M(a, b)$, не существует. Если множество минимизирующих пар не пусто, то оно выпукло (теорема 3). Приведено также достаточное условие, при котором минимизирующая пара единственна. В заключение обсуждается применение этих результатов в проблеме оценки параметров.

В. С. Королюк

**1 В64. Жрецы статистической науки. II. Сэр Рональд о научных выводах.** Dantzig D. van. Statistical priesthood. II. Sir Ronald on scientific inference. «Statist. neerl.», 1957, **11**, № 4, 185—200 (англ., рез. гол.)

Ч. 1 см. РЖМат, 1960, 610. Отчасти в порядке критического обзора последней книги Фишера (Fisher R., Statistical methods and scientific inference, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956), частью же в качестве попытки интерпретации, в работе тщательно рассматривается фишеровская теория правдоподобия и теория фидуциальных выводов. Относительно последней следует иметь в виду, что ее изложение обычно содержит ошибочные утверждения, но возможно истолкование, которое согласуется со взглядами Фишера и получает математически корректную трактовку. Для этого требуется ясное и формально четкое различие между случайными величинами и числами. Определение, данное в настоящей работе, величинам, обладающим фидуциальным распределением по Фишеру, может служить общей платформой для приверженцев и противников Фишера и помочь им понять друг друга. Как метод, так и его результаты, таким образом получают свое оправдание и фидуциальные выводы в этом свете представляются методом исключения неизвестных параметров. Поэтому при всех своих достоинствах они, однако, имеют ограниченную область применения. В этих случаях те же самые результаты могут быть получены другими путями, в частности с помощью теории доверительных областей. Другие же их приложения не покрываются теорией Неймана-Пирсона, как, например, тест Беренса — Фишера, причем смешение случайных величин и постоянных чисел является здесь причиной неисправимых ошибок. Несмотря на постоянно продолжающиеся попытки интерпретировать часто довольно туманные утверждения Фишера в соответствии с его философскими взглядами, никакого оправдания для их приложения найти нельзя. Критицизм предшествующих авторов частью остается в силе и частью отпадает, но нет сомнения, что приложения последнего типа являются целиком ошибочными.

Резюме автора

**1 В65. Доверительные пределы в случае геометрического распределения.** Clemans Kermit G. Confidence limits in the case of the geometric distribution. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 260—264 (англ.)

Проводится $N$ серий испытаний на продолжительность жизни с $N$ приборами, $k$-й прибор выходит из строя после случайного числа испытаний $x_k$ ($k=1, 2, \ldots$). Предполагается, что все $x_k$ независимы и одинаково распределены по геометрическому закону: $P(x_k=s)=p^sq$, $s=0, 1, 2, \ldots$ ($s=1, \ldots, 0<p<1$, $q=1-p$) $E(x_k)=p/q=m$. Для распределения суммы $\sum_{k=1}^{n} x_k$ Феллером было найдено распределение Паскаля: $P\left(\sum_{k=1}^{N} x_k=s\right)=\binom{N-s-1}{s}p^sq^N$. Это обстоятельство дает возможность построить доверительные пределы для величины $m$, достаточной оценкой для которой будет $\hat{m}=\sum_{k=1}^{N} x_k/N$. Приведены номограммы, позволяющие определять доверительные пределы с 90%-ными и 98%-ными уровнями доверия.

Н. В. Смирнов

**1 В66. Оценки максимального правдоподобия при ошибках с переменной дисперсией.** Fisher G. R. Maximum likelihood estimators with heteroscedastic errors. «Rev. Inst. internat. statist.», 1957, **25**, № 1-3, 52—55 (англ.; рез. франц.)

Поскольку эффективное решение уравнений максимального правдоподобия часто невозможно, для этой цели пользуются вероятностным видоизменением метода последовательных приближений — методом спуска (Rao C. R. Advanced statistical methods in biometric research, New York, 1952 p., 165). В работе метод спуска применен к нахождению оценки максимального правдоподобия параметра линейной модели регрессии при несколько более общих предположениях относительно ошибки, чем обычно.

А. М. Каган

**1 В67. О сглаживании функции плотности вероятности.** Whittle P. On the smoothing of probability density functions. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 2, 334—343 (англ.)

Рассматривается оценка функции плотности с помощью линейно сглаженной наблюденной плотности. Основой для оценки является предположение, что ординаты истинной плотности имеют такое априорное распределение, что смежные ординаты сильно зависимы. Методы, употребленные автором, формально почти идентичны винеровским методам выделения сигнала на фоне шумов. Имея $N$ независимых наблюдений, взятых из совокупности с плотностью вероятности $f(x)$, $f(x)$ оценивается статистикой $\hat{f}(x)=\int w_x(y)\,dn(y)=\sum_j w_x(x_j)/N$, где весовая функция $w_x(y)$ удовлетворяет некоторым условиям оптимальности; $N(x)$, $n(x)$ — соответственно число и частота наблюдений меньших некоторого $x$. Считая, что число наблюдений $N$ распределено по закону Пуассона по средним $M$, рассматривается функция $\varphi(x)=Mf(x)$, где $\varphi(x)$ оценивается статистикой $\hat{\varphi}(x)=\int w_x(y)\,dN(y)$. При сделанных предположениях оценка $\hat{\varphi}(x)$ будет оптимальна по достижении минимума $\Delta^2=E_pE_s[\hat{\varphi}(x)-\varphi(x)]^2$, где $E_s$ — математическое ожидание относительно выборочных флуктуаций, $E_p$ — математическое ожидание относительно априорного распределения ординат. Получено среднеквадратичное смещение и дисперсия оценки. При некоторых предположениях исследуется асимптотическое поведение среднего квадратичного отклонения полученной оценки.

В. И. Бабкин

**1 В68. Обобщенное пуассоновское распределение.** Haight Frank A. The generalized Poisson distribution. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 2, 101—105 (англ.)

Изучаются свойства (выписывается формула для среднего $m$, оценивается $\lambda$) обобщенного пуассоновского распределения, которое записывается в виде $P_n=P_r(N=n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{nb+i-1}}{(nk+i-1)!}$, $N$ — целочисленная неотрицательная случайная величина и параметр $\lambda$ равен среднему только для $k=1$.

В. И. Бабкин

**1 В69. Оценка параметров нормальной совокупности по односторонне цензурированной выборке.** Saw J. G.

Estimation of the normal population parameters given a singly censored sample. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 150—159 (англ.)

Рассматриваются оценки среднего $\mu$: $\mu^* = \varepsilon \bar{x}_{r-1} + (1-\varepsilon) x_r$, где $\bar{x}_{r-1} = (x_1 + \ldots + x_{r-1})/(r-1)$, и дисперсии $\sigma^2$: $\eta^* = \alpha \sum_{i=1}^{r-1} (x_i - x_r)^2 + \beta \left[\sum_{i=1}^{r-1} (x_i - x_r)\right]^2$ в нормальной совокупности, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — упорядоченная выборка объема $n$ и значения параметров $\varepsilon$, $\alpha$ и $\beta$ выбраны таким образом, что $\mu^*$ и $\eta^*$ — несмещенные оценки, а $\eta^*$, кроме того, имеет минимальную дисперсию $\gamma$. Эффективность таких оценок очень велика. Приводятся таблицы значений $\varepsilon = \varepsilon(r, n)$ и соответствующих дисперсий $\mu^*/\sigma$ для $1 < r < n \leqslant 20$. Кроме того, $\varepsilon$, $\alpha$, $\beta$, дисперсия $\mu^*/\sigma$ и дисперсия $\eta^*/\sigma^2$ представлены в виде степенных рядов от $1/(n+1)$ с коэффициентами, зависящими от $p_r = r/(n+1)$. Первые 5 коэффициентов этих разложений протабулированы для $p_r = 0{,}50\ (0{,}05),\ 0{,}80$. S. Zubrzycki

**1 В70. Влияние отклонений от нормальности на мощность дисперсионного критерия.** Srivastava A. B. L. Effect of non-normality on the power of the analysis of variance test. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 114—122 (англ.)

Рассмотрим $k$ групп наблюдений $x_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$ и предположим, что $x_{ij} = A + B_j + e_{ij}$, где $A$ — общее среднее, $B_j$ — отклонение от $A$ и $e_{ij}$ — независимые одинаково распределенные величины с плотностью, заданной первыми 4 членами ряда Эджворта:

$$f(z) = \varphi(z) - \frac{\lambda_3}{6}\varphi^{(3)}(z) + \frac{\lambda_4}{24}\varphi^{(4)}(z) + \frac{\lambda_3^{(2)}}{12}\varphi^{(6)}(z),$$

где $\varphi(z)$ — нормальная плотность, а $\varphi^{(\nu)}(z)$ — ее $\nu$-я производная. Автор получает распределение классического $F$-отношения и мощность этого критерия в виде функций от параметров $\lambda_3$ и $\lambda_4$ (т. е. коэффициентов эксцесса и асимметрии). Некоторые результаты были протабулированы. Обсуждается влияние различных значений $\lambda_3$ и $\lambda_4$. R. Bartoszyński

**1 В71. Условия приложимости критерия $\chi^2$ Пирсона.** Vessereau A. Sur les conditions d'application du criterium $\chi^2$ de Pearson. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 87—101 (франц.; рез. англ.)

Делается попытка осветить вопрос о возможности использования при проверке соответствия между теоретически допускаемым и эмпирически наблюдаемым распределением по методу $\chi^2$ асимптотического непрерывного распределения $\chi^2$, с надлежащим числом степеней свободы, вместо точного дискретного распределения этого критерия. Для ориентировки в этом вопросе автор намечает три подхода: 1. Сопоставление моментов первых четырех порядков, обнаруживающее возможность значительных уклонений при конечном значении объема наблюдения $N$; однако таким путем автор не может придти к практически определенным выводам. 2. Рассмотрение частного случая равных между собою теоретических вероятностей для отдельных классов приводит автора, после просчета нескольких примеров, к утешительному выводу о несущественности погрешностей, происходящих от замены дискретного распределения непрерывным уже при небольших $N$, если рассматривать 5% и 1% уровни значимости. 3. Используя надлежащую трансформацию критерия, можно добиться совпадения двух первых моментов рассматриваемых распределений и придти к следующему практическому правилу: а) если «теоретические» числа (математического ожидания частот) не менее нескольких единиц, то можно использовать $\chi^2$ в обычной форме; б) когда «теоретические» числа порядка единицы, следует приравнивать критическое значение для критерия с 5% уровнем значимости тому, которое находится по таблицам $\chi^2$ (с данным числом степеней свободы) для 2—3% уровней значимости. Отметим, что наиболее интересный для практики случай, когда вероятности оцениваются по выборке, не затронут в работе. Н. В. Смирнов

**1 В72. Ошибки, происходящие от уклонения от нормальности в контрольных картах для среднего, использующих серии.** Weiler H. The errors due to non-normality in mean charts using runs. «Austral. J. Appl. Sci.», 1957, **8**, № 3, 181—188 (англ.)

Контрольные пределы на контрольных картах для среднего строются, исходя из предположения нормальности распределения выборочного среднего $\bar{x}$. В случае уклонения от нормальности требуется внесение известных поправок в вычисление вероятностей выхода за контрольные пределы. В связи с этим требует коррективов математическое ожидание $s$ числа выборок, необходимых, чтобы в первый раз осуществилась серия из $\lambda$ последовательных выходов за контрольные пределы. Используя асимптотические разложения Крамера—Эджворса, автор находит, какой должна быть соответствующая поправка. По резюме автора

**1 В73. Выборочное исследование мощности критерия, основанного на $\chi^2$-индексе рассеянности.** Bennett B. M. A sampling study on the power function of the $\chi^2$ «index of dispersion» test. «J. Hyg.», 1959, **57**, № 3, 360—365 (англ.)

Мощность критерия вычисляется методом Монте-Карло. Этот критерий проверяет, будет ли изменчивость признака больше, чем этого можно ожидать при распределении Пуассона, и основана на статистике $z = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/\bar{x}$, которая при нулевой гипотезе, распределена как $\chi^2$ с $n-1$ степенями свободы. Над каждым из 33 разных распределений Пуассона с параметрами $0{,}1 \leqslant \lambda_i \leqslant 10$ было проведено 100 наблюдений. Из каждой выборки были составлены одвыборки различных объемов (от 2 до 10) таким образом, что среднее $\bar{\lambda}$ параметров $\lambda_i$, соответствующих наблюдениям, приняло некоторое заданное значение между 2 и 8. Эмпирическая функция мощности была вычислена как функция $\delta = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \bar{\lambda})^2/\bar{\lambda}$ для уровней значимости 0,05 и 0,01. Сравнение с аппроксимацией Патнайка (Patnaik P. B., Biometrika, 1949, **36**, 202) обнаружило некоторое расхождение для больших $n$ и малых $\bar{\lambda}$. Вычисления проводились на машине ИБМ-650. K. Sarkadi

**1 В74. Программирование точного метода Фишера сравнения двух отношений.** Robertson W. H. Programming Fisher's exact method of comparing two percentages. «Technometrics», 1960, **2**, № 1, 103—107 (англ.)

Пусть из двух генеральных совокупностей производятся выборки объема $a+b$ и $c+d$ соответственно. Выбранные объекты проверяются на наличие определенного признака, при этом число успехов равно соответственно $a$ и $c$, $a = \min(a, b, c, d)$. Метод Фишера сравнения двух отношений позволяет определить вероятность наблюдения дробей $p_1 = a/(a+b)$ и $p_2 = c/(c+d)$ в предположении, что разделение объектов по изучаемому признаку в генеральной совокупности, составленной из элементов исходных генеральных совокупностей, находится в отношении $(a+c)/(b+d)$. Эта вероятность определяется формулой

$$P_1 = \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{a!\,b!\,c!\,d!\,(a+b+c+d)!}.$$

Финальные вероятности определяются формулой

$$P = \sum_{i=1}^{a+1} P_i,$$

где

$$i = P\,\frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{(a-i+1)!(b+i-1)!(c+i-1)!(d-i+1)!(a+b+c+d)!},$$

$i=1, 2, 3, \ldots, a+1$. В работе приведено краткое описание метода Фишера, проиллюстрированное примером. Представлена схема программы вычислений, сделаны некоторые замечания относительно решения задачи на машинах с фиксированной и плавающей запятой, а также замечания относительно некоторых модификаций программы, направленных на расширение ее вычислительных возможностей. В. А. Михайлов

**1 В75. Замечания относительно некоторых свойств мощности критерия $\chi^2$.** Sundaresan K. A note on some properties of the power function of chisquare. «J. Madras Univ.», 1957, **B27**, № 2-3, 299—304 (англ.)

Мощность $\chi^2$-критерия при 100 $\alpha$% уровне относительно альтернативной гипотезы $H_1$, согласно которой рассматриваемые величины $\xi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ независимы, нормальны $N(\alpha_i, 1)$ и $\sum^n \alpha_i^2=\lambda>0$ (проверяемой гипотезе $H_0$ отвечает $\lambda=0$), выражается с помощью нецентрального $\chi^2$-распределения в виде ряда

$$\beta(m, \lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^j}{j!\,\Gamma(m+j)}\int_{x_\alpha}^{\infty}e^{-x}x^{m+j-1}dx,$$

где $n/2=m$ и $x_\alpha$ определяются из уравнения

$$\alpha=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_{x_\alpha}^{\infty}e^{-x}x^{m-1}dx.$$ Доказывается, что 1) $\beta(m, \lambda)$ убывает с ростом числа степеней свободы $n$; 2) $\beta(m, \lambda)$ возрастает с ростом $\lambda$; 3) если $\lambda$ и $n$ варьируют вместе, то $\beta(m, \lambda)$ возрастает коль скоро $\lambda/n>0{,}2$.

Н. В. Смирнов

**1 В76. О выборках из двух генеральных совокупностей и оценки связанных с ними гипотез.** Каменський І. І. Про вибірки з двох генеральних сукупностей і оцінки зв'язаних з ними гіпотез. «Доповіді АН УРСР», 1960, № 2, 150—155 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются выборки из двух генеральных совокупностей, подчиненных соответственно законам распределения $\Phi(x; \alpha_1, \theta_1)$ и $\Phi(x; \alpha_2, \theta_2)$, отличающимся не более чем значениями параметров. Рассматриваются следующие гипотезы: $H_1: \alpha_1=\alpha_2$, если известны $\theta_1, \theta_2$; $H_2: \alpha_1=\alpha_2$, если известно, что $\theta_1=\theta_2$; $H_3: \alpha_1=\alpha_2$; $H_4: \theta_1=\theta_2$, если известны $\alpha_1, \alpha_2$; $H_5: \theta_1=\theta_2$, если известно, что $\alpha_1=\alpha_2$; $H_6: \theta_1=\theta_2$, $H_7: \alpha_1=\alpha_2$, $\theta_1=\theta_2$ для закона Парето: $f(x)=\begin{cases}\alpha\theta^\alpha x^{-(\alpha+1)}, & x>\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$ а также гипотеза $v_1=v_2$ для закона Максвелла

$$f(x)=\begin{cases}2xv^{-2}e^{-x^2v^{-2}}, & x>0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

С помощью критерия отношения правдоподобия выводятся критерии, которые сводятся к эквивалентным критериям $F$ (для закона Максвелла) и $F$ и $\chi^2$ (для закона Парето). Указывается, что в случае закона Парето критерии аналогичны критериям, полученным Эпстейном и Цзао для упорядоченных выборок из совокупностей с экспоненциальным законом распределения (РЖМат, 1954, 4107). В. И. Бабкин

**1 В77. Критерий значимости для таблиц сопряженности признаков.** Kupperman Morton. A rapid significance test for contingency tables. «Biometrics», 1959, 15, № 4, 625—628 (англ.)

Рассмотрим таблицу сопряженности признаков с $r$ строками и $c$ столбцами, в которой размещены результаты $N$ независимых наблюдений. Пусть $f_{ij}$ — частота, соответствующая $i$-й клетке $j$-го столбца; $f_i=\sum_{j=1}^{c}f_{ij}$, $f_j=\sum f_{ij}$. Рассматриваются методы расчета статистики

$$2\check{I}=2\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}f_{ij}\ln f_{ij}+N\ln N-\sum_{i=1}^{r}f_i\ln f_i-\sum_{j=1}^{c}f_j\ln f_j\right]$$

с использованием численных таблиц, появившихся в последнее время в работах различных авторов. Библ. 8 назв. Л. Я. Савельев

**1 В78. Современное состояние проблемы Беренса—Фишера.** Breny H. L'état actuel du problème de Behrens—Fisher. «Trab. estadist.», 1955, **6**, № 2, 111—131 (франц.; рез. исп.)

В исторической последовательности автор излагает постановку и попытки решения задачи о нахождении надлежащего критерия проверки равенства средних в двух нормальных совокупностях с неизвестными дисперсиями. Подробно останавливается на трактовке Фишера этой проблемы с точки зрения «фидуциальных» распределений, породившей оживленную научную дискуссию, в которой принимали участие Нейман, Бартлет, Шеффе, Уолш, Вальд и многие другие статистики. Приводятся критические замечания относительно позиции Фишера и излагаются приближенные решения Уолша и Джеймса. Н. В. Смирнов

**1 В79. О нецентральном $\chi^2$-распределении.** Sankaran Munuswamy. On the non-central chi-square distribution. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 235—237 (англ.)

Предлагается несколько способов приближения нецентрального $\chi^2$-распределения, используемых для вычисления процентных точек при различных значениях параметра нецентральности. Н. В. Смирнов

**1 В80. Значимые отклонения крайних в данных с незначимой разнородностью по $\chi^2$.** Bodmer W. F. A significantly extreme deviate in data with a non-significant heterogeneity chi square. «Biometrics», 1959, **15**, № 4, 538—542 (англ.)

Автор предлагает приближенный критерий для установления значимости отклонения крайних наблюдений, используя преобразование $p=\sin^2\theta$. Обрабатываются данные по скрещиванию растений. О. М. Калинин

**1 В81. Об использовании критерия согласия $\chi^2$ в качестве критерия независимости испытаний.** Башарин Г. П. «Докл. АН СССР», 1957, **117**, № 2, 167—170

Рассматривается система с конечным числом состояний $A_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$. Проверяется простая гипотеза $H_0$, согласно которой испытания независимы, а вероятности состояний соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_s$ (в частном случае, при $p_1=p_2=\ldots=p_s$ имеем простую гипотезу $H_0'$), при альтернативной гипотезе $H_1$, согласно которой испытания связаны в однородную цепь Маркова (простую или сложную порядка $\nu-1$). Пусть $m_i$ — частота состояния $A_i$ и $m_{ij}$ — частота перехода от состояния $A_i$ к состоянию $A_j$ (т. е. число серий $A_iA_j$) в последовательности из $N$ испытаний. Утверждается, что с помощью матричных методов можно показать, что при проверке гипотезы $H_0'$ против альтернативы $H_1$ (цепь простая, т. е. $\nu=2$) наилучшая критическая область определится из соотношения

$$\frac{s^2}{N}\sum_{i,\,j=1}^{s}\left(m_{ij}-\frac{N}{s^2}\right)^2-\frac{s}{N}\sum_{i=1}^{s}\left(m_i-\frac{N}{s}\right)^2\geqslant c,$$

где $c$ — константа, причем левая часть неравенства имеет предельное (при $N\to\infty$) распределение $\chi^2$ с $s^2-s$ степенями свободы. Далее показано, что при проверке гипотезы $H_0$ по отношению к альтернативе $H_1$ (цепь простая) выборочное распределение статистики $\sum_{i,\,j=1}^{s}(m_{ij}-Np_ip_j)^2/Np_ip_j$ сходится (при $N\to\infty$) к распределению суммы независимых случайных величин $\chi^2_{(s-1)^2}+2\chi^2_{s-1}$, где $\chi^2_m$ — случайная величина, распределенная $\chi^2$ с $m$ степенями свободы. В случае, когда с $H_0'$ конкурирует сложная гипотеза $H_1$, согласно ко-

торой испытания связаны в однородную цепь Маркова порядка $\nu - 1$, возникает необходимость в использовании статистик, зависящих от частот только некоторых из $s^\nu$ серий длины $\nu$, причем выбор серии может быть обусловлен характером конкурирующей гипотезы. В заключение рассматривается схема случайного $N$-кратного выбора (с возвращением) членов определителя $s$-го порядка, каждый из которых набирается последовательным выбором $s$ элементов матрицы, когда вероятность выбора каждого из оставшихся допустимых (согласно правилу образования членов определителя) элементов матрицы одинакова для всех них. С. А. Айвазян

**1 В82. О распределении $T^2$-статистики Хотеллинга.** Siotani Minoru. On the distributions of the Hotelling's $T^2$-statistics. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, 8, № 1, 1—14 (англ.)

Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — нормально распределенные случайные величины с нулевыми средними и матрицей ковариаций $\Lambda = (\lambda_{ij})$. Обозначим $L = (l_{ij})$ матрицу оценок для $\lambda_{ij}$, полученных на основании некоторой выборки; $n$ — соответствующее число степеней свободы. Предположим, что получена новая выборка объема $N$. Пусть $x_{i\alpha}$ — значение $X_i$ при наблюдении $\alpha$. Положим

$$T_\alpha^2 = \sum_{i,j=1}^{p} l^{ij} x_{i\alpha} x_{j\alpha}; \quad T_0^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} T_\alpha^2.$$

Здесь $l^{ij}$ — элементы матрицы $L^{-1}$. Сумма $T_0^2$ может быть разбита на независимые, при фиксированных оценках ковариаций, компоненты. Предполагается, что эти компоненты имеют вид:

$$T^2 = \sum_{i,j=1}^{p} l^{ij} v_{ij},$$

где $v_{ij}$ — суммы произведений отклонений $x_{i\alpha}$, $x_{j\alpha}$ от соответствующих среднеквадратичных регрессионных значений. Обозначим через $m$ число степеней свободы $v_{ij}$. При произвольных $p < n$ и $m$ исследуются распределения статистики $T^2$ и отношения двух $T^2$-статистик, независимых при фиксированных оценках ковариаций. Для каждого уровня $\eta$ получены приближенные выражения для $T^2(\eta)$, $P\{T^2 > T^2(\eta)\} = \eta$ и $F(\eta)$, $P\{T_1^2 m_2 / T_2^2 m_1 > F(\eta)\} = \eta$, в форме разложений по степеням $n^{-1}$. Определены коэффициенты при $n^{-1}$ и $n^{-2}$. Коэффициенты при $n^{-2}$ имеют весьма сложную структуру. Библ. 8 назв. Л. Я. Савельев

**1 В83. К вопросу об анализе различия (дискриминантном анализе).** Behrens W. U. Beitrag zur Diskriminanzanalyse. «Biometr. Z.», 1959, **1**, № 1, 3—14 (нем.)

Пусть обследуемые индивиды (например, растения) принадлежат к двум сортам $A$ и $B$. По двум независимым выборкам объемов $n_A$ и $n_B$ получены средние $\bar{x}_{1A}$ и $\bar{x}_{1B}$ признака (1) этих сортов. Предполагая дисперсию одинаковой для сортов, получаем ее оценку $s_1^2$ с $n_A + n_B - 2$ степенями свободы. Если отношение $t_1 = \dfrac{\bar{x}_{1A} - \bar{x}_{1B}}{s_1} = \dfrac{d_1}{s_1}$ значимо отклоняется от нуля, то признак (1) годен для различения сортов. В противном случае привлекается другой признак (2) тех же сортов $A$ и $B$, который в тех же выборках дает средние $\bar{x}_{2A}$ и $\bar{x}_{2B}$, дисперсию $s_1^2$ и отношение $t_2 = \dfrac{\bar{x}_{2A} - \bar{x}_{2B}}{s_2} = \dfrac{d_2}{s_2}$. Для большей эффективности различения по тому и другому признаку согласно правилам дискриминантного анализа строится линейная функция $D = b_1 d_1 + b_2 d_2$ с надлежаще подобранными коэффициентами; $D$ сравнивается со своей средней квадратической ошибкой. Автор показывает, что преимущества этого критерия по сравнению с раздельным использованием только одного из признаков тем больше, чем больше величина $\left|\dfrac{t_2}{t_1} - r\right|$, где $r$ — выборочный коэффициент корреляции признаков, и чем ближе при этом $r$ к $\pm 1$. Такое же исследование проведено для трех признаков. Приведены примеры из ботаники рационального отбора признаков. Н. В. Смирнов

**1 В84. О линиях регрессии.** Rios Sixto. Sur les lignes de régression. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 64—70 (франц., рез. англ.)

Рассмотрены различные математические определения линий регрессии на плоскости, удовлетворяющие следующему наглядному определению: линия регрессии есть та, вокруг которой конденсируется облако наблюдаемых точек. Р. Ф. Матвеев

**1 В85. Об аналитическом методе установления корреляционных уравнений.** Мартынихина Т. Ф. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1959, № 2, 138—143

Пользуясь аппаратом характеристических функций, автор выводит корреляционное уравнение для двух случайных величин, имеющих $\gamma$-распределение. А. А. Темпельман

**1 В86. Ранговый аналог частной корреляции и регрессии с приложением к различным порядковым таблицам контингенции.** Somers Robert H. The rank analogue of product-moment partial correlation and regression, with application to manifold, ordered contingency tables. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 241—246 (англ.)

**1 В87. Полиномиальный коэффициент корреляции.** Baten W. D., Frame J. S. The polynomial correlation coefficient. «Amer. Math. Monthly», 1959, **66**, № 4, 283—287 (англ.)

**1 В88. Выравнивание по марковской серийной кривой.** Davies Hilda M., Jowett G. H. The fitting of Markoff serial variation curves. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 1, 120—142 (англ.)

В ранее опубликованных статьях Джоуэтт ввел понятие локальных статистик (РЖМат, 1956, 7491). В настоящей статье локальная статистика $d(s) = \dfrac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} \dfrac{1}{2} (x_i - x_{i+s})^2$ ($x_i$ — выборочные значения дискретной стационарной последовательности с корреляционной функцией $B(s)$) используется для подбора к наблюденным рядам функции $\theta(1 - \rho^{|s|}) \simeq \delta(s) = \sigma^2(1 - B(s))$ при не слишком больших $s$. Даны асимптотические критерии согласия. Приведены вспомогательные таблицы для вычислений в случае использования при выравнивании пяти статистик $d(s_i)$ ($i = 1, \ldots, 5$) и семи ($i = 1, \ldots, 5, 10, 15$), а также примеры. А. П. Хусу

**1 В89. Альтернативное доказательство теоремы Бирнбаума и Пайка.** Kuiper Nicolaas H. Alternative proof of a theorem of Birnbaum and Pyke. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 251—252 (англ.)

Приведено простое доказательство теоремы Бирнбаума и Пайка (РЖМат, 1959, 4990), в котором равномерное распределение на отрезке (0,1) сводится к равномерному распределению на единичной окружности. В. С. Королюк

**1 В90. Компактная таблица симметрического биномиального кумулятивного распределения с двенадцатью вероятностными уровнями для выборок объемов до 1000.** MacKinnon William J. Compact table of twelve probability levels of the symmetric binomial cumulative distribution for sample sizes to 1,000. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1959, **54**, № 285, 164—172 (англ.)

Пусть $s$ и $r$ суть частоты «успехов» и «неудач» соответственно таких, что $s \leqslant n/2$ и $r \geqslant n/2$, причем $r + s = n$ и $r - s = d$. В статистических задачах для теста гипотезы, что вероятность «успехов» в отдельных испытаниях действительно равна 1/2, пользуются

кумулятивной функцией распределения $P(s, n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{x=0}^{s}\binom{n}{x}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$. В статье приведена таблица критических значений $s$ для $P(s, n) = 0{,}001$; 0,01; 0,02; 0,05; 0,10; 0,20; 0,30; 0,50; 0,70; 0,80; 0,90; 0,95 в зависимости от $d = 1, 2, 3 \ldots, 105$. Описываются приближенные методы, при помощи которых производятся испытания гипотез. В приложениях даются заметки, касающиеся теории и конструкции таблицы. М. К. Камалов

**1 В91. Непараметрические критерии в последовательной форме.** Romani José. Non-parametric tests in sequential form. «Trabajos Estadist.», 1956, 7, 43—96 (исп.; рез. англ.)

Автор рассматривает несколько непараметрических задач и сводит их к параметрическим за счет потери некоторой информации (что обычно во многих стандартных процедурах). Затем строятся последовательные параметрические критерии для этих задач. Подробно излагаются эти критерии и их свойства. На основе аппроксимации Вальда строятся процедуры проверки, оперативные характеристики и кривые среднего объема выборок. Приводятся таблицы. Рассматриваются задачи: 1) односторонний критерий для проверки гипотезы о медиане, 2) критерий гипотезы, что две выборки одного и того же объема извлечены из одной совокупности против альтернативы одностороннего сдвига, 3) то же самое при альтернативе двустороннего сдвига, 4) критерий равенства дисперсий, 5) комбинированный критерий сдвига и дисперсии, 6) общий критерий совпадения совокупностей, 7) критерий случайности. Подробно анализируется задача 1); автор вычисляет эффективность своего критерия относительно обычного последовательного критерия (около 60%) и относительно обычного непоследовательного критерия (120%). H. Rubin

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 427.

**1 В92. Некоторые замечания к анализу световых кривых методом автокорреляции.** Kreiken E. A. Some remarks on the analysis of light curves with the autocorrelation method. «Communs Fac. sci. Univ. Ankara», 1955, A7, № 1, 253—271 (англ.; рез. турецк.)

Автор считает, что проводимое некоторыми астрономами вычисление спектра временного ряда по его выборочной корреляционной функции $r_k$ с целью выявления вторичных периодов, практически ничего не добавляет к выводам, сделанным на основе $r_k$, поскольку при этом могут возникнуть ложные периоды. Приведены примеры. А. П. Хусу

**1 В93. Асимптотические распределения критерия согласия $\psi^2$ для Марковских цепей $m$-го порядка.** Goodman Leo A. Asymptotic distributions of «psisquared» goodness of fit criteria for $m$-th order Markov chains. «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 4, 1123—1133 (англ.)

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ — последовательность наблюдений стохастического процесса, в котором каждое $x_t$ может принять одно из $s$ значений $1, 2, \ldots, s$. Через $f_u$ обозначим частоту появления цепочки из $m$ наблюдений $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ в исходной последовательности. Пусть $H_n'$ — сложная гипотеза о том, что процесс есть цепь Маркова порядка $n$; $H_n$ — некоторая простая гипотеза, принадлежащая к $H_n'$. Через $H_n^*$ обозначим максимум правдоподобия $H_n$. Пусть ожидаемое значение $f_u$ в последовательности длины $N$ при гипотезе $H_n$ будет $f_{un}$ и при $H_n^*$ будет $f_{u,n}^*$. Пусть $\psi_{m,n}^2 = \sum_u (f_u - {}_{u,n})^2/f_{u,n}$,

$$\psi_{m,n}^{*2} = \sum_u (f_u - f_{u,n}^*)^2/f_{u,n}^*, \quad \psi_{n+1,n}^{*2} = 0.$$

Гуд (Good I. J.) высказал следующие два положения: а) асимптотическое распределение $(N \to \infty)\psi_{m,n}^{*2}$, когда $H_n'$ верна, есть $\underset{\lambda=1}{\overset{m-n-1}{*}} K_{g(\lambda)}(x/\lambda)$, где символом $*$ обозначена операция свертки; $g(\lambda) = (s-1)^2 s^{m-1-\lambda}$ и $K_i(x)$ есть $\chi^2$-распределение с $i$ степенями свободы; б) асимптотическое распределение $\psi_{m,n}^2$, когда $H_n$ верна, есть $\underset{\lambda=1}{\overset{m-1}{*}} K_{g(\lambda)}(x/\lambda) * K_{s-1}(x/m)$. Доказывается положение а) для общего случая $n \geqslant -1$ ($H_{-1}'$ есть гипотеза равновероятности). Положение в), как показано, верно только для $n = 0$ (в том виде, как оно сформулировано выше). Для общего случая $n \geqslant -1$ указывается надлежащая модификация. Предполагается, что все переходные вероятности марковской цепи положительны. Указано, что результаты могут быть модифицированы для случая, когда некоторые из этих вероятностей нули. Библ. 16 назв. В. И. Бабкин

**1 В94. О статистической трактовке случайных процессов.** Fleischer Isidore, Kooharian Anthony. On the statistical treatment of stochastic processes. «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 2, 544—549 (англ.)

Пусть $x(t, \omega)$ — случайный процесс, $t \in T$, с ограниченной при всех $t \in T$ дисперсией; корреляционная функция $r(s, t) = Mx(s)\overline{x(t)}$ предполагается непрерывной по обоим переменным, а функция $r(t, t)$ — интегрируемой на $T$. В таком случае, как известно (см., например, Karhunen K., Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1947, ser. A1, № 37, 1 — 79), для $x(t, \omega)$ будет иметь место представление

$$x(t, \omega) = m(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k(\omega)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(t),$$

где $m(t) = Mx(t)$, $\varphi_k(t)$ и $\lambda_k$ — собственные функции и собственные значения интегрального уравнения с ядром $r(s, t)$, а $z_k(\omega)$ — взаимно ортогональные случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией, отличающиеся лишь множителем от коэффициентов Фурье функции $x(t, \omega)$ по функциям $\varphi_k(t)$. Обсуждается точный смысл этого представления и возможность замены коэффициентов Фурье случайной функции $x(t, \omega)$ обычными коэффициентами Фурье соответствующей реализации и $x(t, \omega_0)$. Далее это представление используется для построения критерия согласия Неймана — Пирсона для сравнения гипотезы $H_0$ (согласно которой процессу $x(t, \omega)$ отвечает заданное распределение вероятностей $P_0$ в функциональном пространстве) с гипотезой $H_1$ (согласно которой процессу отвечает другое распределение $P_1$). В частности, приводятся результаты, относящие к построению критерия согласия для сравнения гипотез о двух различных нормальных распределениях вероятностей; в качестве примера рассматривается случай, когда $x(t, \omega)$ — стационарный нормальный периодический процесс (с периодом $2\pi$) с нулевым средним значением, а гипотезы $H_0$ и $H_1$ приписывают этому процессу различные корреляционные функции $r_0(\tau)$ и $r_1(\tau)$. В заключение аналогичные методы применяются к задаче об оценке неизвестных параметров, входящих в распределение вероятностей для случайного процесса $x(t, \omega)$. А. М. Яглом

**1 В95. Об эффективности оценки тренда процесса Орнштейна—Уленбека.** Striebel Charlotte T. On the efficiency of estimates of trend in the Ornstein—Uhlenbeck process. «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 1, 192—200 (англ.)

Рассматривается задача об оценке коэффициентов $k_1, k_2, \ldots, k_s$ в выражении $f(t) = k_1\varphi_1(t) + \ldots + k_s\varphi_s(t)$ (где $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_s(t)$ — известные функции) по наблюденным значениям реализации на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$

случайного процесса $y(t) = x(t) + f(t)$, являющегося суммой функции $f(t)$ и процесса Орнштейна — Уленбека $x(t)$ — гауссовского стационарного процесса с нулевым средним значением и корреляционной функцией $r(s, t) = e^{-\alpha|s-t|}$. При этом наряду с оценкой наименьшей дисперсии $\bar{f}(t)$ функции $f(t)$ рассматривается также «оценка по методу наименьших квадратов» $\hat{f}(t)$ (РЖМат, 1956, 8979) — простейшая оценка, определяемая безотносительно к точному виду корреляционной функции процесса $x(t)$. В цитированной работе было показано, что в случае, когда $f(t)$ — многочлен или тригонометрический многочлен, асимптотическая эффективность оценки по методу наименьших квадратов равна единице, так что при $T \gg 1/\alpha$ оценка по методу наименьших квадратов практически не отличается от оценки наименьшей дисперсии. В этой связи рассматривается случай сравнительно широкого класса функций $\varphi_s(t)$ и показывается, что в этом классе асимптотическая эффективность оценки по методу наименьших квадратов оказывается равной единице лишь для весьма специальных функций $\varphi_s(t)$, лишь немного более общих чем те, которые рассматривались в работе Мана и Моранда; для всех же остальных функций $\varphi_s(t)$ эта асимптотическая эффективность оказывается строго меньшей единицы. А. М. Яглом

**1 В96. Таблицы критериев Вальда для среднего нормального распределения.** Barraclough Elizabeth D., Page E. S. Tables for Wald tests for the mean of a normal distribution. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 169—177 (англ.)

Последовательный критерий Вальда для проверки гипотезы $\theta = \theta_0$ против альтернативы $\theta = \theta_1$, где $\theta$ — неизвестное среднее нормальной совокупности с известной дисперсией $\sigma^2$, определяется следующим образом: продолжать выборку $x_1, \ldots, x_i$ до тех пор, пока

$$a < \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_0^2 - \theta_1^2) < b;$$

если левое неравенство нарушается первым прекратить выборку и принять $\theta = \theta_0$, и аналогично принять $\theta = \theta_p$, если первым нарушится правое неравенство. Величины $a = -\alpha\sigma/(\theta_1 - \theta_0)$ и $h = (b - \alpha)\sigma/(\theta_1 - \theta_0)$ протабулированы для $P_- = 0{,}999$, 0,995, 0,99, 0,95; $P_+ = 0{,}05$ (0,05) 0,10 (0,10) 0,70 и $\mu = 0{,}25$ (0,25) 1,00, где $P_-$ — вероятность принять $\theta = \theta_0$, если эта гипотеза верна, а $P_+$ — вероятность принять $\theta = \theta_0$, если $\theta = \theta_1$ верно; $\mu = (\theta_1 - \theta_0)/2\sigma$. Также даются графики, отражающие эту зависимость. Сверх того, средние выборочные числа (т. е. среднее число наблюдений до принятия решения) $N_-$ (при $\theta = \theta_0$) и $N_+$ (при $\theta = \theta_1$) протабулированы для тех же значений $P_-$, $P_+$ и $\mu$. Результаты сравниваются с вальдовской аппроксимацией оперативной характеристики критерия. S. Zubrzycki

**1 В97. Статистическая теория крайних значений.** Gumbel E. J. Statistical theory of extreme values. «Bull. Inst. internat. statist.», 1958, **36**, № 3, 112—14 (англ.; рез. франц.)

**1 В98. Статистические методы для исключения больших уклонений.** Doornbos R. Statistische methoden voor het aanwijzen van uitbijters. «Statist. neerl.», 1959, **13**, № 4, 453—462 (голл.; рез. англ.)

**1 В99. О доказательстве леммы, используемой при выводе распределения выборочных моментов второго порядка для симметричной $p$-мерной совокупности** Tikkiwal B. D., Kabe D. G. On the proof of the lemma used in deriving the distribution of the second order sample moments for symmetric $p$-variate population. «Proc. 46th Indian Sci Congr. Assoc.», Dehli, 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 6 (англ.)

**1 В100. О точном распределении статистики А. Н. Колмогорова и его асимптотическом разложении.** Чжан Ли-цянь. «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1960, 4, № 2, 135—159

Перевод с китайского (РЖМат, 1958, 4914).

**1 В101. О точном распределении статистики Н. В. Смирнова и его асимптотическом разложении.** Чжан Ли-цянь. «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1960, 4, № 2, 121—134

Перевод с китайского (РЖМат, 1958, 1915).

**1 В102. О некоторых асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия и соответствующих байесовских оценок.** Ле Кам Люсьен (Le Cam L.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1960, 4, № 2, 69—119

Перевод с английского (РЖМат, 1956, 641).

**1 В103. Применение статистики к планированию и анализу экспериментов.** Gonagin A. Aplicações da estatística no planejamento e analise dos experimentos. «Rev. brasil. estatíst.», 1958, **19**, № 75-76, 121—129 (порт.)

**1 В104. Многофазовая выборка.** Bhargava R. P. On multi-phase sampling. «Proc. 46th Indian Sci. Congr. Assoc.», Dehli, 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 10 (англ.)

**1 В105 К. Регрессионный анализ.** Williams E. Regression analysis. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1959, ix, 214 pp., ill., 60 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 526, 12 (англ.)

**1 В106 К. Основы математической статистики.** Ivanović Branislav. Osnovi matematičke statistike. Beograd, Savezni zavod statist., 1959, 311 s., 800 din. «Bibliogr. Jugosl.», 1959, **10**, № 10, 426 (сербо-хорв.)

## ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

**1 В107. Математическая теория адаптивных контролируемых процессов.** Bellman Richard, Kalaba Robert. A mathematical theory of adaptive control processes. «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», 1959, **45**, № 8, 1288—1290 (англ.)

Пусть состояние некоторой системы определяется точкой $p$ фазового пространства и способом $P$ получения информации о ней. В результате принятия решения $q$ система переходит в новое состояние с $p_1 = T_1(p, P; q, r)$ и $P_1 = T_2(p, P; q, r)$, где $T_1$ и $T_2$ — некоторые преобразования, а $r$ — случайный вектор, функция распределения которого зависит от $p$, $P$ и $q$. После принятия решений $q_1, \ldots, q_N$ получается (случайное) состояние $p_N, P_N$, и задача состоит в минимизации математического ожидания некоторой функции $\Phi(p_N, P_N)$. По поводу аналогичных понятий см. РЖМат, 1958, 580. Указывается на возможность применения к поставленной задаче методов динамического программирования и на ее связь с достаточными статистиками. Н. Н. Воробьев

**1 В108. Об адаптивных контролируемых процессах.** Bellman Richard, Kalaba Robert. On adaptive control processes. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 4, 3—11 (англ.)

Общие идеи и методы теории адаптивных контролируемых процессов иллюстрируются на примере неоднородного уравнения Ван-дер-Поля: $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = r(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $r(t)$ — случайная функция, статистические свойства которой могут быть не вполне известными. Задача состоит в нахождении такого управления параметром $\mu$, которое минимизирует «убытки», происходящие в результате отклонения системы от точки $x = 0$, $\dot{x} = 0$ в фазовом пространстве. Эта задача после дискретизации рассматривается с точки зрения методов динамического программирования. Описываются простейшие случаи: детерминированный, когда $r(t)$ есть равная нулю постоянная; стохастический, когда $r(t)$ есть последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин, принимающих значения $+1$ и $-1$ соответственно с известными вероятностями $p$ и $q$; адап-

тивный, когда известна не сама вероятность $p$, а лишь ее априорное распределение. Указываются некоторые возможные обобщения. Н. Н. Воробьев

**1 В109. Процессы передачи сообщений с обучением и случайной продолжительностью.** Bellman Richard, Kalaba Robert. On communication processes involving learning and random duration. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1958, **6**, № 4, 16—21 (англ.)

См. реф. 1 В107, 1 В108.

**1 В110. Динамическое программирование в лесном хозяйстве.** Аримидзу (Arimizu Tsutomu), «Нихон рингаккайси, J. Japan. Forest. Soc.», 1959, **41**, № 11, 448—457 (японск.)

**1 В111. Оптимальная система распознавания знаков с помощью решающих функций.** Чжоу С. К. (Chow C. K.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1959, **3**, № 1, 143—156

См. РЖМат, 1959, 4018.

**1 В112. Двойственная задача в линейном программировании.** Winkel H. Das Dualproblem in der linearen Planungsrechnung. «Unternehmenforschung», 1959, **3**, № 3, 118—129 (нем.)

На простом примере распределения ограниченных ресурсов разъясняется экономический смысл решения двойственной задачи линейного программирования. Показано, как решение двойственной задачи используется в планировании. Л. И. Горьков

**1 В113. О стохастических линейных неравенствах.** Talacko J. On stochastic linear inequalities. «Trab. estadist.», 1959, **10**, № 2, 89—112 (англ., рез. исп.)

Доказан ряд простых теорем, позволяющих решать задачи линейного программирования, когда некоторые из данных являются случайными величинами. Для случая пуассоновских распределений приведен числовой пример. Библ. 57 назв. Л. И. Горьков

**1 В114. Сравнение первоначального и видоизмененного симплекс-методов.** Wagner Harvey M. A comparison of the original and revised simplex methods. «Operat. Res.», 1957, **5**, № 3, 361—369 (англ.)

Дается описание симплекс-метода и проводится пошаговое сравнение первоначального и видоизмененного методов для типичной симплексной итерации. Приводятся некоторые доводы в пользу видоизмененного симплекс-метода. По резюме автора

**1 В115. Симплекс-метод для отыскания решения некоторых задач линейного программирования.** Kunzi H. P. Die Simplexmethode zur Bestimmung einer Ausgangslösung bei bestimmten linearen Programmen. «Unternehmensforschung», 1958, **2**, № 2, 60—69 (нем.; рез. англ., франц.)

Дается метод вычисления допустимого решения для некоторых задач линейного программирования, решаемых симплекс-методом. Резюме автора

**1 В116. Одна простая задача распределения ресурсов.** Derman Cyrus. A simple allocation problem. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 4, 453—459 (англ.)

Рассматривается следующая задача. В начале некоторого периода времени имеется $T$ единиц продукта, который нужно распределить между $k$ участками. На каждом участке возникает случайный спрос, который удовлетворяется за счет распределяемых единиц продукта. Невостребованный продукт к концу периода теряет ценность. Требуется произвести распределение ресурсов таким образом, чтобы максимизировать математическое ожидание числа единиц товара, использованных для удовлетворения спроса. Математически задача сводится к разысканию $a_i \geqslant 0$, $\sum_1^k a_i = T$, максимизирующих функцию $G(a_1, \ldots, a_k)$. В случае, когда максимум $G$ достигается внутри указанной области изменения $a_i$, задача поддается классическим методам. Приведены две теоремы, дающие достаточные условия того, что максимум $G$ достигается внутри области. Рассмотрен также вопрос об оптимальном размере $T$. Задача имеет практический интерес. А. А. Корбут

**1 В117. Обобщение транспортной задачи Хичкока.** Prager William. A generalization of Hitchcock's transportation problem. «J. Math. and Phys.», 1957, **36**, № 2, 99—106 (англ.)

Излагается подход к обобщению классической транспортной задачи, навеянный идеями механики сплошных сред. Рассматриваются потоки однородного продукта по транспортной сети от пунктов производства к пунктам потребления. Допускаются отрицательные потоки, соответствующие перегрузке (часть потока может использоваться в пункте перегрузки, а часть направляться дальше). Для каждого участка сети известны стоимость перевозки по нему и его пропускная способность. Ищутся потоки, которые полностью использовали бы производственные мощности пунктов производства, удовлетворили бы потребностям пунктов потребления и ограничениям на пропускные способности магистралей. Дается характеристика решений этой задачи. В заключение указывается на связь обобщенной транспортной задачи с задачами складирования (РЖМат, 1960, 8033).

Примечание референта. Другой подход к транспортной задаче с пунктами перегрузки см. РЖМат, 1960, 14211. А. А. Корбут

**1 В118. Метод получения приближенных решений задач линейного программирования типа Канторовича—Хичкока и его теоретическое обоснование.** «Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Beijing daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. pekinensis», 1959, **5**, № 1, 31—44 (кит.; рез. англ.)

Излагается транспортная задача в ее матричной постановке и предлагается метод для ее решения.

Примечание референта. Этот метод широко известен. Неправильно утверждение, что он лучше других методов. Метод потенциалов значительно эффективнее. И. В. Романовский

**1 В119. О транспортной задаче.** Aronszajn N. Sur un problème de transport. «Bull. sci. math.», 1959, **83**, № 1, 9—20 (франц.)

Работа, написанная в 1941 г., но не опубликованная вследствие военного времени, сохраняет исторический интерес. Постановка транспортной задачи совпадает с современной ее постановкой в матричной форме. Вводятся понятия звена (упорядоченная пара элементов матрицы) и цепи (конечная последовательность звеньев, в которой II элемент каждого звена находится в той же строке (столбце), что и I элемент следующего). Замкнутой цепью называется такая, в которой первый элемент I звена находится в той же строчке (столбце), что и II элемент последнего звена.

Спадом звена $(x_{ik_1}\, x_{ik_2})$ называется $(r_{ik_1} - r_{ik_2})$, где $x_{ik_1}$, $x_{ik_2}$ — элементы матрицы — решения, а $r_{ik_1}$, $r_{ik_2}$ — соответствующие им элементы заданной матрицы. Для решения задачи автор пользуется принципом: если замкнутая цепь, составленная из $(n+1)$ звена $(n = 0, 1, \ldots)$, имеет положительный спад, то среди первых элементов этой цепи должен быть по крайней мере один равный нулю. Э. А. Меркулова

**1 В120. Об одной транспортной задаче.** Land A. A problem in transportation. «Conf. linear programming», May, 1954. London, Ferranti Ltd., s. a., 30—31 (англ.)

Автор дает предварительный отчет о своем изучении задачи о транспортировке угля с каменноугольных копей к коксовым печам. Цель исследования — выяснить, может ли применение методов линейного программирования (в данном случае, разумеется, транспортной задачи) дать экономию для Национального угольного департамента Великобритании. Имеется интересное обсуждение связанных с этой проблемой экономических вопросов. A. J. Hoffman

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 6, 547.

**1 В121. Заметка о транспортной задаче Прагера.** Kuhn H. W. A note on Prager's transportation problem. «J. Math. and Phys.», 1957, **36**, № 2, 107—111 (англ.)

Замечания к предыдущей работе Прагера (реф. 1В117). Описанная в ней обобщенная транспортная задача ставится в виде пары двойственных задач линейного программирования. Показана тождественность решения в смысле Прагера и решения задачи, сформулированной в терминах линейного программирования. Обсуждается также вопрос о существовании решения, обойденный Прагером.

Примечание референта. Транспортная задача, совершенно аналогичная рассмотренной в двух предыдущих статьях, была впервые изучена в работе Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина. Сб. «Проблемы повышения эффективности работы транспорта», Изд. АН СССР, 1949, 110—138. А. А. Корбут

**1 В122. Применение линейного программирования в экономике.** Панкратьева Н. В. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. экон., филос., права», 1959, № 4, 73—81

Пример транспортной задачи.

Примечание референта. Вызывает удивление таблица расстояний между пунктами (табл. 2). По-видимому, автор считает, что все перевозки производятся через Москву (в том числе, например, из Фрунзе в Зарайск, лежащий на пути из Фрунзе в Москву). И. В. Романовский

**1 В123. Отношения соседства на многообразии циклических перестановок.** Heller I. Neighbor relations on the convex of cyclic permutations. «Pacif. J. Math.», 1956, **6**, № 3, 467—477 (англ.)

Используя матричное представление перестановок $\| p_{ij} \|$, автор рассматривает их как вершины многогранника в $n^2$-мерном пространстве. Две вершины полиэдра считаются имеющими соседство порядка $k$, если они имеют общую гиперплоскость размерности $k$ и не имеют таковой с меньшей размерностью. Пусть $K(Q_n)$ — максимальное значение $k$ для выпуклого многогранника всех циклических перестановок из $n$ элементов, не оставляющих на месте ни одного фиксированного элемента. Доказывается, что $K(Q_n) = \frac{n}{2} - 1$, если $n = 4m + 2$; $K(Q_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$, если $n \neq 4m + 2$, при $n \geqslant 8$ и $K(Q_n) = 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2$ соответственно для $n = 1, 2, \ldots, 6, 7$. О. Г. Фаянс

**1 В124. Некоторые практические вопросы линейного программирования.** Stahlknecht P. Einige praktische Fragen des Linear Programming. «Z. angew. Math. und Mech.», 1959, **39**, № 9-11, 395—396 (нем.)

Краткое рассмотрение вычислительных методов для задач линейного программирования, в которых переменные, кроме условий неотрицательности, подчинены еще условиям вида $x_k \leqslant r_k$. А. А. Корбут

**1 В125. О подходе к задаче о бродячем торговце с помощью линейного программирования и комбинаторики.** Dantzig G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M. On a linear-programming, combinatorial approach to the travelling-salesman problem. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 1, 58—66 (англ.)

Соображения по поводу численного решения задачи о бродячем торговце. И. В. Романовский

**1 В126. Выбор начального решения в задаче о бродячем торговце.** Dacey Michael F. Selection of an initial solution for the traveling-salesman problem. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 1, 133—134 (англ.)

**1 В127. Приложение анализа межотраслевых связей и линейного программирования к планированию общественных работ.** Судзуки, Кавакита (Suzuki Matsatsugu, Kawakita Yoneo), «Добоку гаккайси, J. Japan Soc. Civil Engrs», 1959, **44**, № 9, 11—13 (японск.)

**1 В128. Линейное программирование как новый математический метод научного экономического управления движением.** Jándy Géza. A lineáris programozás, mint a közlekedés tudományos gazdasági üzemvezetésének új matematikai módszere. «Építés-és közlekedéstud. közl.», 1960, **4**, № 1-2, 133—162 (венг.)

**1 В129. Замечание по поводу теоремы о «доминируемости» профессора Манна.** Levitan R. E. A note on professor Manne's dominance» theorem. «Manag. Sci.», 1959, **5**, № 3, 332—334 (англ.)

**1 В130. Метод линейного программирования и применение его на практике.** Мацуда Сёти. «Kagaku, Kagaku», 1959, **29**, № 10, 529—532 (японск.)

**1 В131. Размещение ресурсов для развития экономики.** Chenery Hollis B., Kretschmer Kenneth S. Resource allocation for economic development. «Econometrica», 1956, **24**, № 4, 365—399 (англ.)

Задача сведена к минимизации выражения

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i + \beta_i \left(\frac{X_i}{X_i + M_i}\right)\right] X_i + \sum_{i=1}^{n} k_i E_i, \qquad (1)$$

где величины $X_i \geqslant 0$, $M_i \geqslant 0$, $E_i \geqslant 0$ удовлетворяют условиям:

$$Y_i = X_i + M_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_j,$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_i + \sum_{i=1}^{n} w_i E_i \leqslant L^*, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i M_i - \sum_{i=1}^{n} h_i E_i \leqslant D^*, \qquad (3)$$

$$h_i = \gamma_i + \rho_i E_i,$$

где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i > 0$, $k_i > 0$, $Y_i > 0$, $a_{ij} \geqslant 0$, $w_i > 0$, $L^* > 0$, $g_i > 0$, $D^* > 0$, $\gamma_i > 0$, $\rho_i < 0$ — заданные постоянные, и, кроме того, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$. С помощью предложенного Куном и Такером метода строится оптимальное решение, зависящее от двух параметров $P_f \geqslant 0$, $P_w \geqslant 0$ и подлежащих дополнительному определению «множителей Лагранжа» $P_i \geqslant 0$:

$$\hat{E}_j = \begin{cases} 0, & r_j \leqslant 0 \\ r_j, & r_j \geqslant 0, \end{cases}$$

где

$$r_j = \frac{1}{2\rho_i P_f} \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i + w_i P_w + k_j - \gamma_j P_f \right),$$

$$\hat{d}_j = \frac{\hat{X}_j}{\hat{X}_j + \hat{M}_j} = \begin{cases} 0, & t_j \leqslant 0, \\ t_j, & 0 \leqslant t_j \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant t_j, \end{cases}$$

где

$$t_j = \left(\frac{1}{2\beta_j}\right) \left( g_j P_f - \sum_{i}^{n} a_{ij} P_i - w_j P_w - \alpha_j \right),$$

$$\hat{X}_i = 0, \qquad (4)$$

$$\hat{M}_i = Y_i + \sum_{j \in S_1} a_{ij} \hat{X}_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{E}_j,$$

если $d_i = 0$, и $\hat{M}_i = (1 - \hat{d}_i)\hat{X}_i / \hat{d}_i$, $\hat{X}_i$ определяется единственным образом из системы уравнений

$$\hat{X}_i - \sum_{j \in S_1} a_{ij} \hat{X}_j - \sum_{j}^{n} a_{ij} \hat{E}_j + \hat{m}_i \hat{X}_i = Y_i, \quad i \in S_1, \qquad (5)$$

если $d_i > 0$. В (4) и (5) под $S_1$ понимается совокупность номеров $i$, для которых $d_i > 0$. Показывается, что коэффициенты $P_i$ могут быть определены единственным образом, если известны $P_f$ и $P_w$, а коэффициенты $P_f$ и $P_w$ можно подобрать так, чтобы миними-

зировать (1) и одновременно удовлетворить условиям (2) и (3). Для построения решения предложен итеративный метод (метод Сейделя). Приведены два примера. О. Г. Фаянс

**1 В132. Дополнительное условие и долгосрочное планирование.** Verdoorn P. J. Complementarity and long-range projections. «Econometrica», 1956, **24**, № 4, 429—450 (англ.)

Рассмотрены условия, при которых возможен выбор оптимальной политики, максимизирующей величину национального продукта, приходящегося на душу населения. Приведен пример, рассчитанный Центральным бюро планирования. О. Г. Фаянс

**1 В133. Некоторые замечания о динамической теории цен.** Ferguson C. E. Some remarks on dynamic price theory. «Jahrb. Nationalökon. und Statistik», 1959, **171**, № 4, 262—274 (англ.)

Сформулированы принципы, которые, по мнению автора, могли бы быть положены в основу построения динамической теории цен в условиях капиталистической экономики. Л. И. Горьков

**1 В134. Комментарии к «Броуновскому движению в рыночных запасах».** Laurent A. G. Comments on «Brownian motion in the stock market». «Operat. Res.», 1959, **7**, № 6, 806—807 (англ.)

В названной работе Осборна (РЖМат, 1960, 9322) было показано, что величина $y=\log P(t+\delta)/P(t)$ ($P(t)$ — цена случайно выбранного запаса в случайный момент времени $t$) распределена нормально с дисперсией $\sigma_y=\sigma\sqrt{t}$. Автор комментариев утверждает, что данный результат ранее был в более общей форме получен Ремери и из него непосредственно вытекает второй результат работы Осборна. А. А. Каплан

**1 В135. Ответ на «Комментарии к «Броуновскому движению в рыночных запасах».** Osborne M. F. M. Reply to «Comments on 'Brownian motion in the stock market'». «Operat. Res.», 1959, **7**, № 6 807—811 (англ.)

Лоран в «Комментариях» (реф. 1В134) указывает, что два основных результата статьи Осборна (РЖМат, 1960, 9322) вытекают из ранее полученного более общего результата Ремери. Настоящая заметка является ответом Лорану. А. А. Каплан

**1 В136. Обучение эконометрике.** Tintner Gerhard. The teaching of econometrics. «Econometrica», 1954, **22**, № 1, 77—100 (англ.)

Рассматривается методика преподавания эконометрики в различных странах, состав предмета, срок обучения, количество студентов и т. п. О. Г. Фаянс

**1 В137. Теорема об индексных числах (геометрическое замечание).** Johnson Harry G. The index-number theorem. (A geometrical note). «Canad. J. Econ. and Polit. Sci.», 1959, **25**, № 2, 174—179 (англ.)

**1 В138. Макроэкономические модели австрийского народного хозяйства.** Tintner Gerhard. Makroökonomische Modelle für die österreichische Wirtschaft. «Z. Nationalökon.», 1957, **17**, № 2, 262—282 (нем.)

На основе послевоенных статистических данных для экономики Австрии построены открытая четырехсекторная модель Леонтьева и статическая модель Кейнса. А. А. Корбут

**1 В139. Экономические следствия модели Клейна—Гольдбергера.** Cornwall John. Economic implications of the Klein—Goldberger model. «Rev. Econ. and Statist.», 1959, **41**, № 2, Part 1, 154—161 (англ.)

Общее обсуждение некоторых вопросов, связанных с динамическими экономическими моделями. В приложении приводится модель Клейна-Гольдбергера, параметры которой вычислены на основе статистических данных 1939 г. А. А. Корбут

**1 В140. Измерение производительности на основе балансовых таблиц затрат и выпуска продукции.** Stobbe Alfred. Produktivitätsmessung auf der Grundlage von Input—Output—Tabellen. «Weltwirtsch. Arch.», 1959, **82**, № 2, 237—273 (нем.; рез. англ., франц., исп., итал.)

На основании балансовых таблиц затрат и выпуска продукции, составленных для нескольких периодов времени, строится система индексов, позволяющая сравнивать производительность и учитывать технический прогресс за разные периоды. Полученные результаты применены для сравнения балансовых таблиц для экономики Голландии, исчисленных по данным 1947 и 1950 гг. А. А. Корбут

**1 В141. Линейная модель циклического роста.** Minsky Human P. A linear model of cyclical growth. «Rev. Econ. and Statist.», 1959, **41**, № 2, Part 1, 133—145 (англ.)

Для описания циклического роста капиталистической экономики автор считает возможным, следуя Самуэльсону (Samuelson P. A., Rev. Econ. and Statist., 1939, **21**, May, 78), использовать следующее уравнение в конечных разностях: $Y_t=(\alpha_1+\beta)Y_{t-1}-\beta Y_{t-2}+\alpha_0$, где $Y_t$ — доход в период времени $t$, $\alpha_0$ — потребление в начальный момент, $\alpha_1$ — маргинальная склонность к потреблению, $\beta$ — акселератор. Изучается поведение решения этого уравнения в зависимости от соотношения между входящими в него параметрами. Л. И. Горьков

**1 В142. К геометрии экономических проблем благосостояния.** Kenen Peter B. On the geometry of welfare economics. «Quart. J. Econ.», 1957, **71**, № 3, 426—447 (англ.)

Рассматривается «диаграмма-прямоугольник» («бокс-диаграмма») Эджворта, на сторонах которого откладываются количества двух материальных благ, потребляемых двумя индивидами, а в двух противоположных углах помещаются начала координат для этих двух индивидов. На диаграмму-прямоугольник наносятся два семейства кривых безразличия в потреблении. Каждая из кривых безразличия соответствует комбинациям количеств благ, обеспечивающих индивиду один и тот же уровень потребления. Автор существенно видоизменяет диаграмму-прямоугольник и вводит в нее, кроме кривых безразличия в потреблении, еще и так называемые кривые трансформации, т. е. кривые безразличия в производстве, показывающие такие комбинации количеств товаров, выпуск которых одинаково обеспечен наличными средствами производства. Это построение применяется для анализа вопросов международной торговли двумя товарами между двумя странами. А. А. Конюс

**1 В143. Метод анализа деятельности в теории расположения.** Beckmann M., Marschak T. An activity analysis approach to location theory. «Proc. 2 Sympos. Linear Programm.», 1955, **1**, 331—379 (англ.)

Речь идет о географическом размещении экономических объектов.

**1 В144. Ценообразование, инвестиции и стратегические игры.** Brigham Georges. Pricing, investment and games of strategy. Conf. 6 Congr. internat. «Inst. Manag. Sci.», Paris, 1959. Londres—Paris—New York—Los Angeles, s. a., 1/37—17/37 (англ.)

Описана проделанная в авиационной компании Боинг работа по определению объема производства самолетов. Все расчеты проводились по эмпирическим формулам, полученным в результате анализа производства и изучения рынка. Л. И. Горьков

**1 В145 К. Линейное программирование. Методы и приложения.** Gass S. I. Linear programming. Methods and applications. New York, McGraw-Hill, 1958, 223 p. (англ.)

Книга является первой попыткой формального изложения линейного программирования, посвящена изложению симплекс-метода и связанных с ним теоретических вопросов, а также подробному описанию возможных областей применения методов линейного програм-

мирования в практической деятельности. Книга состоит из трех до некоторой степени самостоятельных частей. Первая часть («Введение») начинается с гл. 1, в которой кратко описана математическая задача, решение и исследование которой является предметом линейного программирования, и рассмотрены три примера практических задач, сводящихся к задачам линейного программирования. В гл. 2 описаны математические основы, которые потребуются для дальнейшего изложения. Вторая часть книги «Методы: теоретические и вычислительные» посвящена изложению методов линейного программирования—теоретических и вычислительных. Гл. 3 начинается с точной математической постановки задачи. Затем, введя необходимые определения (допустимое решение, невырожденное базисное решение и др.), автор приводит ряд теорем, в которых выясняются некоторые свойства допустимого и оптимального решений. Заканчивается глава описанием метода получения из имеющегося оптимального решения других оптимальных решений. Гл. 4 посвящена описанию симплекс-метода. В небольшой гл. 5 автор останавливается на более глубоких теоретических вопросах, связанных с основной задачей линейного программирования (прямая и двойственная задачи линейного программирования). Гл. 6 посвящена подробному изложению улучшенного симплекс-метода. В гл. 7 рассказывается о методах борьбы с вырождением. Приведен пример одного из возможных случаев вырождения — цикличности в симплекс-методе. Гл. 8 знакомит читателя с интересной задачей отыскания экстремума линейной функции, коэффициенты которой линейно зависят от параметра. Гл. 9 содержит ряд дополнительных сведений, которые могут оказаться полезными уже при непосредственном проведении вычислений. В частности, в конце этой главы приведены интересные характеристики возможностей цифровых вычислительных машин применительно к решению задач линейного программирования. Третья, заключительная часть книги («Приложения») знакомит читателя с возможными областями применения методов линейного программирования. Начинается она с гл. 10, посвященной транспортной задаче. В гл. 11 приводятся наиболее важные примеры конкретных задач, которые сводятся к общей задаче линейного программирования (например, задача планирования оптимального уровня производства с учетом затрат на хранение или известная задача о составлении диеты). Заканчивается последняя часть книги гл. 12, в которой даются основные понятия из теории матричных игр и устанавливается эквивалентность между матричной игрой и общей задачей линейного программирования. Рассматриваются также игры с матрицей, элементы которой зависят от параметра. Имеется обширная библиография по применению линейного программирования, подобранная по разделам.

Л. И. Горьков

**1 В146 К. Введение в линейное программирование.** Чарнс А., Купер В., Хендерсон А. Перев. с англ. М., Моск. экон. ин-т, 1960, 98 стр., илл., 3 р. 95 к.

**1 В147 К. Один эксперимент по анализу спроса. Вычисления для задачи о диете на Манчестерской вычислительной машине.** Brown J. A. C. An experiment in demand analysis. The computation of a diet problem on the Manchester computer. Conf. linear programming, May, 1954, London, Ferranti, Ltd, s. a., 41—53. Discuss., 54—55 (англ.)

Подход с точки зрения линейного программирования.

H. Wold

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 678.

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

**1 В148. Функция надежности.** Colley J. L. The reliability function. «Proc. IRE», 1960, **48**, № 2, 242—243 (англ.)

Дается способ непосредственного определения из номограммы вероятности того, что система работает без повреждений в течение некоторого времени при заданном среднем времени между повреждениями. Вероятность может быть определена с точностью до четвертого десятичного знака; пятый десятичный знак может быть определен с помощью логарифмической интерполяции.

Т. И. Товстуха

**1 В149. К расчету корректирующих цепей систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки.** Кухтенко В. И. «Автоматика и телемеханика», 1959, **20**, № 9, 1180—1187 (рез. англ.)

В качестве условий физической осуществимости системы управления или ее элементов принимаются: 1) условие, налагаемое на импульсную переходную функцию $k(t) \equiv 0$ при $t < 0$, 2) условие, что передаточные функции имеют вид рациональных дробей, у которых степень числителя ниже или равна степени знаменателя. Рассматриваются схемы коррекции при помощи последовательного корректирующего звена и при помощи цепи обратной связи. Передаточная функция корректирующей цепи $W_1(s)$ связывается с передаточными функциями объекта регулирования $W_0(s)$ и замкнутой системы управления $K(s)$. Для того чтобы степень числителя $K(s)$ была на $q$ единиц меньше степени знаменателя, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$T_0 = \int_0^\infty [k(t)]^2\,dt < \infty, \ldots, T_{q-1} = \int_0^\infty [k^{(q-1)}(t)]^2 dt < \infty.$$

Система оптимальна, если 1) функционал

$$x_n^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty R_n(\tau - \theta)\, k(\tau)\, k(\theta)\, d\tau d\theta,$$

где $R_n(t)$ — корреляционная функция помехи, являющейся стационарной случайной функцией, $k(t)$ — импульсная переходная функция замкнутой системы, — минимален; 3) мгновенное значение составляющей ошибки, соответствующее вынужденным движениям, вызванным полезным сигналом $g(t)$, равно 0; при этом $k(t)$ должна удовлетворять определенным соотношениям. При удовлетворении их и при выполнении неравенств для $T_0, \ldots, T_{q-1}$ решается задача минимизации функционала $\overline{x_n^2}$. Автор получает уравнение типа Винера—Хопфа для определения $k(t)$ и достаточное условие минимума. По $K(s)$ определяются передаточные функции цепей коррекции двух рассмотренных типов. Значения параметров, оставшихся неопределенными, выбираются так, чтобы удовлетворялись условия физической осуществимости. Рассматривается пример (электродвигатель с передаточной функцией $W_0(s) = K/s$ в качестве исполнительного элемента; полезный сигнал вида $g(t) = g_0 + g_1 t$; $R_n(t) = R_0 e^{-\alpha|t|}$; корректирующее звено находится в цепи обратной связи). Библ. 8 назв.

Т. И. Товстуха

**1 В150. Математические модели для определения надежности системы. Часть I.** Barlow R. E., Hunter L. C. Mathematical models for system reliability. Part I. «Sylvania Technol.», 1960, **13**, № 1, 16—31 (англ.)

Компоненты системы считаются зависимыми, ремонт рассматривается как составная часть работы. Строится математическая модель системы. Состояние системы во времени определяется как стохастический процесс. Определяются понятия надежности и эффективности работы. Вводятся понятия марковской системы, стационарного и нестационарного процессов и т. д. Анализируется надежность работы одно-, двух- и трехзвенной системы. Надежность может быть рассчитана, если известны параметры, характеризующие скорость повреждения и ремонта в системе. Наоборот, задаваясь требуемыми значениями надежности, можно определить

допустимые значения указанных параметров. Библ. 9 назв. Т. И. Товстуха

**1 В151. Математические исследования по предсказанию надежности.**—. Mathematical research on reliability prediction. «Automat. Control», 1960, **12**, № 2, 25—26 (англ.)

В популярной форме кратко изложены некоторые соображения по надежности комплексных систем.

Л. Н. Куцев

**1 В152. О сравнении надежности систем при поэлементном и общем резервировании.** Смолицкий Х. Л., Чукреев П. А. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1959, № 3, 176—178

Доказывается, что при любых значениях вероятностей отказа элементов поэлементное резервирование выгоднее общего. Пусть $q_i$ — вероятность отказа $i$-го элемента, $n$ — число элементов, $m$ — число параллельно включенных систем в случае общего резервирования или увеличенное на единицу число резервных элементов, подключаемых к каждому элементу системы в случае поэлементного резервирования. Тогда вероятность исправной работы системы в первом случае $A_m^{(n)} = (1 - q_1^m)\frac{A_m^{(2)}}{A_m^{(1)}}\frac{A_m^{(3)}}{A_m^{(2)}}\cdots\frac{A_m^{(n)}}{A_m^{(n-1)}}$; вероятность исправной работы при поэлементном резервировании $B_m^{(n)} = (1 - q_1^m)(1 - q_2^m)\ldots(1 - q_n^m)$. Показано, что при всех $m > 1$, $n > 1$ и $0 < q < 1$, $A_m^{(k)}/A_m^{(k-1)} < 1 - q_k^m$, т. е. $B_m^{(n)} > A_m^{(n)}$. Следовательно, поэлементное резервирование дает больший выигрыш в надежности по сравнению с общим, и этот выигрыш тем больше, чем больше $m$, $n$ и $q$. При $m = 1$ или $n = 1$, или $q_i = 1$, или $q_i = 0$ оба случая резервирования дают одинаковые результаты. Имеет смысл дублировать менее надежные элементы большее число раз и к более надежным подсоединять меньшее число резервных элементов.

Т. И. Товстуха

**1 В153. Применение метода Монте-Карло для оценки надежности системы с разными способами работы.** Curtin Kenneth M. A «Monte Carlo» approach to evaluate multimoded system reliability. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 6, 721—727 (англ.)

Кратко описывается система с разными способами работы. Определяются: рабочая эффективность способа как произведение вероятности работы в соответствии с этим способом на характеризующий его фактор эффективности; суммарная рабочая эффективность всей системы. Рассматривается конкретная система. Каждой возможной последовательности операций приписывается некоторый фактор эффективности. Метод Монте-Карло используется для нахождения вероятности того, что система работает в соответствии с некоторым определенным способом за определенное время (значения из таблицы случайных чисел сравниваются с рассчитанными для групп устройств значениями; определяется из сравнения, работает ли группа исправно; из последовательности подобных операций подсчитываются частоты повреждений для каждой группы). Т. И. Товстуха

**1 В154. Общее условие экстремума заданной функции среднеквадратичной ошибки и квадрата математического ожидания ошибки динамической системы.** Андреев Н. И. «Автоматика и телемеханика», 1959, **20**, № 7, 833—838 (рез. англ.)

В качестве критерия для сравнения систем принимается некоторая функция $f(p, q)$, где $q$ — среднеквадратичная ошибка и $p$ — квадрат математического ожидания ошибки системы. Решается задача приближения: требуется найти оператор $A$, для которого $f(p, q)$ достигает экстремума для всех $s \in S$, где $p = \{M[Y(s) - AX(t)]\}^2$, $q = M\{[Y(s) - AX(t)]^2\}$, $X(t)$ — наблюдаемая, $Y(t)$ — приближаемая случайные функции. Предварительно рассматривается более простая задача приближения для случайных величин, ее результаты затем применяются к случайным функциям. Множество операторов из данного класса $R$ должно быть линейно. Рассматривается практически интересный случай, когда функция $f$ достигает наибольшего или наименьшего значения на границе области изменения $p$ и $q$. Показано, что для $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant -1$) для любого оператора $B \in R$ необходимым и достаточным условием того, что оператор $A$ реализует минимум (максимум) суммы $p + \lambda q$ при любом $s \in S$, является условие: $M[Y(s) - AX(t)]M[BX(t)] + \lambda M\{[Y(s) - AX(t)]BX(t)\} = 0$. При $\lambda = \infty$ уравнение совпадает с уравнением, полученным ранее В. С. Пугачевым. Оптимальный оператор $A$ зависит от $\lambda$ как от параметра. Наибольшее и наименьшее значения $f(p, q)$ на границе области определяются как экстремумы функции $\Phi(\lambda) = f[p(\lambda), q(\lambda)]$. Рассматривается частный случай, когда

$$Y(s) = \int_Q \theta(z(t), t, s)\,dt,\ AX(t) = \int_T \varphi(X(t), t, s)\,dt,$$

где $\theta(z, t, s)$ — заданная функция, $\varphi(x, t, s)$ — произвольная функция. В этом случае получается уравнение для характеристической функции $\varphi(x, t, s)$ оператора, реализующего экстремум выражения $p + \lambda q$. При $\lambda = \infty$ уравнение совпадает с уравнением Заде. Библ. 7 назв.

Т. И. Товстуха

**1 В155. Критерий качества линейной системы.** Bateau Dwight W. Paper. A performance criterion for linear systems. «Amer. Soc. Mech. Engrs», 1959, № A-290, 8 pp., ill. (англ.)

Входной и выходной сигналы линейной системы рассматриваются как векторы в гильбертовом пространстве; длины векторов не меняются при переходе в частотную область. В последней определяются квадраты длин векторов входного случайного «окрашенного» сигнала и ошибки. Их отношение рассматривается в качестве характеристики, оценивающей работу системы. На примерах конкретных систем рассчитывается указанное отношение. Показано, что средний квадрат ошибки сильно зависит от полосы пропускания системы и уменьшается с увеличением последней. Библ. 8 назв. Т. И. Товстуха

**1 В156. Метод исследования точности существенно нелинейных систем автоматического управления при помощи эквивалентной передаточной функции.** Пупков К. А. «Автоматика и телемеханика», 1960, **21**, № 2, 191—200 (рез. англ.)

Работа является дальнейшим развитием идеи статистической линеаризации существенных нелинейностей, входящих в систему автоматического управления. В отличие от ранних вышедших работ по статистической линеаризации (работы Казакова и Бутона) здесь предлагается аппроксимировать нелинейную функцию эквивалентным частотным коэффициентом или эквивалентной передаточной единицей, который определяется выражением

$$K(\omega, \sigma_x, m_x) = \sqrt{\frac{S_{вых}(\omega)}{S_{вх}(\omega)}}, \qquad (1)$$

где $m_x$, $\sigma_x$ и $S_{вх}(\omega)$ — соответственно математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение и спектральная плотность случайной функции на входе нелинейного элемента. Необходимая для определения спектральной плотности корреляционная функция случайной функции на выходе элемента выражается соотношением

$$R_{вых}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\,f(x_2)\,w_2(x_1, x_2, \tau)\,dx_1 dx_2, \qquad (2)$$

где $f(x)$ — уравнение нелинейного элемента, $w_2(x_1, x_2, \tau)$ — двумерная плотность вероятности входной случайной функции. Используя аппроксимацию $f(x)$ прямолиней-

ными отрезками и применяя для $w_2(x_1, x_2, \tau)$ разложение Крамера по ортогональным полиномам Эрмита, $R_{вых}(\tau)$ представляется в виде

$$R_{вых}(\tau) = \sum_\nu a_\nu^2 \rho^\nu, \quad (3)$$

где $a_\nu$ — постоянные коэффициенты, $\rho$ — нормированная корреляционная функция входной случайной функции. Таким образом определение $k(w, \sigma_x, m_x)$ сводится к определению коэффициентов $a_\nu$, которые зависят от вида нелинейной характеристики и от $\sigma_x$ и $m_x$. Приведены значения этих коэффициентов для различных типов нелинейностей. Н. Г. Назаров

**1 В157. Статистическая теория градиентных систем автоматической оптимизации при квадратичной характеристике объекта.** Фельдбаум А. А. «Автоматика и телемеханика», 1960, **21**, № 2, 167—179 (рез. англ.)

Рассматривается задача анализа самонастраивающейся системы с градиентной автоматической оптимизацией при наличии случайных факторов и квадратичной характеристики объекта. Задача системы состоит в поддержании минимума некоторой величины $y$, являющейся функцией переменных $u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$: $y = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Система дискретного типа и автоматический поиск осуществляется путем пробных движений: в течение одного цикла производится серия проб, а затем рабочий шаг, в следующем цикле опять серия проб и рабочий шаг и т. д. Изучается случай воздействия независимых случайных помех, приложенных в точках измерения переменных $u_i$ и приращений минимизируемой величины $\Delta_i y$. Для данной задачи решена задача определения погрешности в установившемся режиме и оценка времени переходного процесса. Развитая методика иллюстрируется примерами анализа систем с одной и двумя переменными. Н. Г. Назаров

**1 В158. Определение моментов второго порядка различных координат систем автоматического управления с применением электронных моделирующих устройств.** Мельксис Л. А. «Автоматика и телемеханика», 1960, **21**, № 2, 220—223 (рез. англ.)

Применительно к использованию на электронных моделирующих устройствах изложен метод определения вторых моментов координат линейной системы автоматического управления. Если случайное возмущение представить каноническим разложением

$$X(t) = \sum_\nu x_\nu^*(t), \quad (1)$$

где $x_\nu^*(t) = D_\nu^{1/2} x_\nu(t)$, $D_\nu$ — дисперсия случайной величины; $x_\nu(t)$ — координатная функция, то искомые вторые моменты запишутся:

$$k_y(t, \tau) = \sum_\nu y_\nu^*(t)\, y_\nu^*(\tau),$$

$$k_{x,y}(t, \tau) = \sum_\nu x_\nu^*(t)\, y_\nu^*(\tau). \quad (2)$$

Здесь $y_\nu^*(t)$ есть решение линейного дифференциального уравнения $L(p, t)\, y_\nu^*(t) = M(p, t)\, x_\nu^*(t)$. В статье приводится блок-схема специализированной вычислительной машины непрерывного действия, предназначенной для определения вторых моментов, и дается краткое пояснение работы отдельных блоков. Н. Г. Назаров

**1 В159. О среднеквадратической устойчивости случайных линейных систем.** Samuels J. Clifton. On the mean square stability of random linear systems. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 248—259 (англ.)

Изучается вопрос о среднеквадратической устойчивости решения линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \cdot \frac{d^k u(x)}{dx^k} a_k(x) = p(x), \quad (1)$$

где $a_k(x)$ — случайные функции, могущие быть взаимно коррелированными, $p(x)$ — также случайная функция, но статистически не зависимая от любого $a_k(x)$. Решение считается устойчивым в среднеквадратическом, если $\lim M[u^2(x)] < N$, где $N$ — const, $M$ — знак операции математического ожидания. Теория развивается при следующем основном допущении: спектры коэффициентов $a_k(x)$ и решения $u(x)$ принадлежат непересекающимся интервалам. В этом случае определение второго момента решения уравнения (1) сводится к решению интегрального уравнения вида

$$M[u(x_1)\, u(x_2)] = M[F(x_1)\, F(x_2)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[K(x_1, \xi_1)\, K(x_2, \xi_2)]\, M[u(\xi_1) u(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \quad (2)$$

где $K(x, \xi)$ — весовая функция, $F(x)$ — решение уравнения (1) для случая, когда $a_k(x)$ заменено на $M[a_k(x)]$. Уравнение (2) решается в замкнутой форме для двух случаев: 1) уравнение (1) содержит один чисто случайный коэффициент с корреляционной функцией $K_{a_j}(x_1, x_2) = S\delta(x_1 - x_2)$; 2) уравнение (1) содержит один случайный коэффициент с узким спектром (спектральная плотность есть $\delta$-функция). Для этих случае в выведены также простые критерии среднеквадратической устойчивости. Теоретические выкладки иллюстрируются примером исследования цепи RLC. Н. Г. Назаров

**1 В160. Проблема надежности в механизмах и природе.** Bishop Walton B., LaRochelle John A. The reliability problem in machines and nature. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 9, 16—21 (англ.)

Обсуждается возможность осуществления в машинах некоторых принципов, обеспечивающих надежную работу в живых организмах. Дается обзор литературы. Рассчитывается вероятность удовлетворительной работы ансамбля, состоящего из $n$ тождественных частей; повреждения считаются независимыми. Предположение, что ансамбль работает удовлетворительно пока работает удовлетворительно хотя бы одна из его частей, увеличивает искомую вероятность. Сделанные предположения оправдываются в большинстве случаев в природе и будут близки к истине для машин, анализирующих свою собственную работу. Библ. 3 назв. Т. И. Товстуха

**1 В161. Корреляция диаметр—длина и поверхность—длина для волокон шерсти.** Bona Mario. Corrélation diamètre/longueur et corrélation aire/longueur pour la fibre de laine. «Rev. statist. appl.», 1958, **6**, № 4, 81—110 (франц.)

Исследуется разность и частное коэффициентов корреляции между случайными величинами $x$ и $y$ (длина и диаметр волокна) и между $x$ и $y^2$, в частности в предложении, что $x$ и $y$ имеют логарифмически нормальное распределение, с целью дать теоретическое обоснование для наблюдаемого на практике приблизительного равенства этих коэффициентов. Кроме того анализируется несколько серий измерений шерстяных волокон с точки зрения приемлемости гипотезы о логарифмической нормальности. S. Zubrzycki

**1 В162. Применение статистических методов для оценки прочности конструкций при сейсмических воздействиях.** Болотин В. В. «Инженерный сб.», 1960, **27**, 58—69

Поведение линейно-упругой системы при сейсмическом воздействии изучается вероятностными методами. Строятся оценки взаимных корреляционных функций обобщенных координат точек системы и оценки веро-

ятности превышения координатами заданной величины. Библ. 8 назв. Е. С. Кочетков

**1 В163. Исследование угольнозернистого сопротивления с помощью теории вероятностей.** Renyi Alfréd. Szénszemcsés ellenállások vizsgálata valószínűségszámítási módszerrel. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1957 (1958), 2, № 3-4, 247—256 (венг.; рез. русск., англ.)

Сопротивление, имеющее призматическую форму, получается прессованием смеси угольной пыли, фенопласта и заполняющего материала. Угольные зерна должны быть распределены с равномерной плотностью, следуя закону Пуассона. Сопротивления прессуются между двумя металлическими пластинами. Поступающий ток достигает сначала тех угольных зерен, которые граничат с соответствующей металлической пластиной. Из каждого зерна $k$ в этом первом слое ток достигает тех зерен второго слоя, которые расположены вблизи $k$ (математическое ожидание этих соседей обозначим через $\nu$) и т. д. от слоя к слою, вплоть до второй металлической пластины. Проводимость обеспечена лишь в случае $\nu>1$. Изложенная модель явления приводит к выводу, что $\nu\leqslant\frac{p}{2}(2+\frac{\delta}{r})^3=N_s$ причем $p$ есть математическое ожидание общего объема угольной пыли в единице объема, $r$ означает средний радиус зерен, а $\delta$ представляет максимальное расстояние между двумя центрами зерен, при котором возможна еще проводимость между зернами. Для промышленных образцов сопротивлений, в которых должно быть обеспечено $\nu>1$, путем лабораторных опытов была найдена для N величина $<1$. Это противоречие потребовало модификации модели. По существу установлено, что в выпускаемых в продажу сопротивлениях зерна угля концентрируются в тонких слоях. После некоторого улучшения метода инженером Катона изготовлены такие сопротивления, для которых вышеописанная модель применима и даже имеет практическое преимущество. P. Medgyessy

**1 В164. Эксперименты со смесями.** Scheffe Henry. Experiments with mixtures. «J. Roy. Statist. Soc.», 1958, **B20**, № 2, 344—360 (англ.)

Рассматриваются свойства смеси, состоящей из $q$ компонент. Предполагается, что доля $i$-й компоненты равна $x_i\geqslant 0$, так что $\Sigma_{i=1}^{q}x_i=1$ и свойства смеси не зависят от ее общего количества. Автор показывает, что в данных предположениях в ряде случаев исследование свойств смеси может быть проведено с помощью использования полиномиальной регрессии. В этом случае поведение смеси может быть описано многочленом $n$-й степени $\eta(x_1,\ldots,x_q)$. Приводится метод оценки коэффициентов такого многочлена на основании предполагающихся известными, свойств более простых смесей, а также указываются методы выяснения влияния различных компонент и их комбинаций на формирование свойств смеси. Помимо этого, анализируется ряд вопросов планирования и проведения экспериментов со смесями, вопрос о проверке согласия экспериментальных наблюдений с теоретическими предпосылками и вопрос об оценке коэффициентов регрессии из ряда наблюдений. Работа может иметь практическое применение там, где возможно большое количество различных компонент в смеси, но одна из них превалирует по своему объему (например, в фармацевтике, парфюмерной промышленности, при очистке нефти и пр.). М. А. Куликов

**1 В165. Методика выборочного определения средней цены изделия для случая двух сортов.** Бендерский Я. М. «УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР», 1959, № 9, 3—6 (рез. узб.)

Рассматривается генеральная совокупность, представляющая собой смесь двух сортов товаров, причем доли и цены для 1-го и 2-го сортов предполагаются равными $p$, $q=1-p$ и $a\pm b$. $+a$ соответственно. По случайной бесповторной выборке объема $n$ определяется математическое ожидание «хозяйственного ущерба» $\overline{R}$ от принятия всей партии по средней цене одного изделия, определенной по выборке. Вычислено максимальное значение $\overline{R}$, которое зависит от числа $k=[np]$. Далее определяется такое значение $k$ (оптимальное), при котором $\overline{R}_{\max}$ достигает своего минимума. Приводится числовой пример для иллюстрации. М. К. Камалов

**1 В166. О проверке водомеров.** Oderfeld J., Zubrzycki S. O sprawdzaniu wodomierzy. «Zastosow. mat.», 1954, **1**, № 2, 125—137 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается и обосновывается следующая методика приемочного контроля измерительных приборов: пусть прибор имеет систематическую ошибку, распределенную $N(a,\sigma_0)$ по приборам, и при измерении величины $x$ делает случайную ошибку $N(x,\sigma_1)$. Чтобы прибор был признан годным, относительная ошибка его $m_1$ должна быть меньше $0{,}9\,q$, где $q$ — допустимое отклонение. Если $1{,}1\,q\geqslant m_1\geqslant 0{,}9\,q$ — проводится второе изменение $m_2$ и прибор принимается при $0{,}5(m_1+m_2)\leqslant q$. В остальных случаях прибор отвергается. Авторы определяют оперативную характеристику данного метода при доле брака $\omega$ и вероятности признания годности прибора $P$. Приведены графики функции, связывающей эти величины и объяснение правила пользования ими для целей практики. Наконец, показывается низкая эффективность предложенной схемы контроля при большом $\sigma_1/q$. М. А. Куликов

**1 В167. Проведение выборки из партии товара, состоящей из нескольких слоев.** Grochowina Jadwiga, Rudzki Wiesław, Wiśniewski Klemens. Pobieranie próbki z partii towaru składającej się z warstw. «Przegl. statyst.», 1960, **7**, № 1, 71—81 (польск.; рез. русск., англ.)

Пусть совокупность разбита на $N_1$ слоев, каждый из которых разбит в свою очередь на $N_2$ слоев 2-го порядка, и т. д.; каждый слой $k$-го порядка состоит из $N$ элементов. Оценивается генеральное среднее. В статье находится оптимальный объем выборки из каждого слоя. (Основная формула (22) статьи неверна, а потому и дальнейшие выводы авторов неправильны. Верную формулу для $\sigma^2_{\overline{x}}$ в случае многостепенной выборки можно найти в работе М. И. Эйдельнанта: К вопросу о выборке из конечных совокупностей, Тр. Инст. Мат. Мех. АН УзССР, 1952, **10**, № 1, 141—147. *Ред.*). R. Bartoszyński

**1 В168. Замечания о планах выборочного контроля.** Moriguti Sigeiti. Notes on sampling inspection plans. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs», 1955, **3**, № 4, 99—121 (англ.)

Рассмотрен ряд планов контроля по количественным и качественным признакам с точки зрения их экономичности. Выведены оперативности характеристики и математические ожидания объема инспекции. Кроме понятия общих потерь $R=I^n+LDNp+(1-L)HN$ ($I$ — стоимость инспекции одного изделия, $D$ — потери от принятого дефектного изделия, $H$ — потери от браковки изделия, $N$ — объем партии, $p$ — доля дефектных в партии, $n$ — объем выборки, $L=L(p)$ — оперативная характеристика — вероятность принять партию с долей брака $p$) вводится еще понятие ущерба $\Delta R$, причем $\Delta R=R-DNp$, если $p<p_0$, $\Delta R=R-HN$, если $p>p_0$. Здесь $p_0=H/D$ — критическая точка для экономической оценки потерь (при $p<p_0$ выгоднее принимать партию без контроля, а при $p>p_0$ выгоднее браковать партию также без контроля). Форму-

лируется принцип минимакса для $\Delta R$. Исходя из этого принципа приблизительно рассчитываются оптимальные параметры контроля (используется нормальное приближение для числа дефектных в выборке).

Н. В. Смирнов

**1 В169. Приемочный контроль по количественному признаку в случае, когда измерения подвержены ошибкам.** David Herbert T., Fay Edward A., Walsh John E. Acceptance inspection by variables when the measurements are subject to error. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **10**, № 2, 107—129 (англ.)

Рассматривается модификация плана инспекции по нормально распределенному количественному признаку для того случая, когда измерения производятся со случайными ошибками. Относительно измерительных ошибок известно, что они независимы друг от друга и от истинного значения, подчинены нормальному закону $N(0,\sigma_e)$. Для отношения $\sigma/\sigma_e$, где $\sigma$ — стандартное отклонение истинных значений признака, предполагается известным его нижний предел $R$, $0<R\leqslant\sigma/\sigma_e$ и верхний предел $R\leqslant\infty$. Для уменьшения влияния измерительных ошибок для каждого контролируемого изделия измерения повторяются $m$ раз и выводится среднее арифметическое. Даются рекомендации по выбору параметров плана как для случая, когда $\sigma_e$ известна, так и для случая неизвестной $\sigma_e$ при заданных $p_1$, $p_2$ $\alpha$ и $\beta$.

Н. В. Смирнов

**1 В170. Карты контроля со счетом очков (Об ошибках первого рода карт контроля, когда вместе с контрольными пределами принимается во внимание длина серий односторонних отклонений).** Toda Hideo. Band-score control charts. I. On the error of the first kind of control charts when one takes action by runs as well as by the control limits. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1958, **5**, № 2, 54—58 (англ.)

Цель этой статьи найти ошибки первого рода контрольных карт, когда все данные этих карт лежат в контрольных пределах: $(-3\sigma, +3\sigma)$, но имеет место систематическое смещение среднего от нулевого положения. Для этого автором предлагается разбить контрольную полосу $(-3\sigma, +3\sigma)$ на подполосы и всякое попадание в полосы засчитывать определенным количеством очков, суммы которых не должны превышать заданного предела. Если данные меняют знак, то счет начинается снова. Для подсчета вероятностей кумулятивных сумм очков автором используется эргодическое свойство цепей Маркова. Устанавливается, что критерий счета очков контрольных карт является достаточно эффективным и может применяться независимо от критерия три сигмы, таким образом усиливая его.

А. М. Бендерский

**1 В171. Последовательный анализ. Основания и приложения.** Weber Erna. Das Ergebnis-Folge-Verfahren (Sequênzanalyse). Grundlagen und Anwendungen. «Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe», 1957—1958, **7**, № 5, 559—581 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Популярное изложение основ статистических методов проверки гипотез. В третьей главе описывается методика последовательного анализа Вальда для выбора между двумя конкурирующими гипотезами, применительно к простейшему случаю контроля качества. На примерах показывается расчет оперативных характеристик и кривых для математического ожидания объема наблюдений.

Н. В. Смирнов

**1 В172. О передаче координат элементов телевизионного изображения.** Цуккерман И. И. «Радиотехника», 1958, **13**, № 4, 77—79

В целях уменьшения избыточности в телевизионном сообщении предлагается использовать для передачи координатный метод. Кадр телевизионного изображения составляет $a$ строк, каждая из которых состоит из $b$ элементов. Значение яркости каждого элемента квантуется на конечное число $m$ уровней. Из двух смежных элементов последующий называется «новым», если значения яркости обоих элементов не принадлежат одному и тому же квантовому уровню. Обычно передача изображения заключается в передаче значений яркости последовательных элементов первой, второй и т. д. строк. Рассматриваемый координатный метод передачи состоит в том, что вместо передачи последовательных значений яркости всех элементов передаются значения яркости лишь «новых» элементов и их координаты (их место в строке и номер строки). Указывается, что описанный метод дает возможность существенно уменьшить количество данных, необходимых для изображения. Отмечается, что тогда, когда частота появления «новых» элементов мала, координатный метод позволяет сузить ширину полосы частот, требуемую для телевизионной передачи.

Б. С. Цыбаков

**1 В173. Некоторые статистические характеристики телевизионного сигнала.** Дерюгин Н. Г. «Радиотехн. и электроника», 1958, **3**, № 6, 777—783

Производится описание эксперимента по изучению одно- и двумерного распределений вероятностей телевизионного сигнала с Московского телецентра. Установлено, что двумерное распределение может быть хорошо аппроксимировано нормальным распределением.

Б. С. Цыбаков

**1 В174. О надежности связи при ограниченной полосе.** Wolter Hans. Über die Sicherheit einer Nachrichtenverbindung, der eine endliche Bandbreite reserviert ist. «Arch. elektr. Übertrag.», 1959, **13**, № 6, 267—270 (нем.; рез. англ.)

Изучается передача по гауссовскому каналу с ограниченной полосой частот, при наличии других мешающих передатчиков, занимающих часть этой полосы. Вводится понятие надежности, определяемое как отношение части правильно принятых битов сообщения к числу всех битов в нем. Дается выражение надежности как функции: числа битов сообщения в 1 сек., мощностей сигнала, передающего сообщение, сигналов других мешающих передатчиков и шумов, а также ширины полосы.

Б. С. Флейшман

**1 В175. Расчет и оптимизация синхронного демодулятора.** Booton Richard C., Jr, Goldstein Moise H., Jr. The design and optimization of synchronous demodulators. «IRE WESCON Convent. Rec.», 1957, **1**, № 2, 154—170 (англ.)

Демодулятор состоит из последовательно включенных перемножителя и фильтра с переходной характеристикой $h(\tau)$. Если на вход перемножителя поступает функция $x(t)$, то на его выходе будет функция $i(t)=x(t)\,p(t)$, где $p(t)$ — периодическая функция. На вход демодулятора подается сигнал $x(t)=m(t)\cos\omega_c t+q(t)\sin\omega_c t$, где $\omega_c$ — фиксированная частота, а $m(t)$ и $q(t)$ — случайные стационарные независимые процессы, корреляционные функции которых есть $\varphi_m(\tau)$ и $\varphi_q(\tau)$. Процесс $m(t)$ — полезное сообщение, несущее информацию, а процесс $q(t)$ — шум. Идеальный демодулятор при $q(t)=0$ рассчитывается так, чтобы процесс на его выходе $r(t)=m(t)$. Работа посвящена вычислению среднеквадратической ошибки, происходящей при демодуляции из-за наличия шума $q(t)$. Для определения $e(t)=r(t)-m(t)$ прямыми методами вычисляются спектральная плотность нестационарного процесса $x(t)$ и спектральная плотность процесса $e(t)$. Окончательные выражения для $Me^2(t)$ и усредненной по времени $Me^2(t)$ приводятся для случая экспоненциальных корреляционных функций

$$\varphi_m(\tau)=e^{-|\tau|\omega_b},\quad \varphi_q(\tau)=k\varphi_m(\tau) \qquad (1)$$

и

$$h(\tau)=\omega_a e^{-\omega_a\tau},\quad \tau>0.$$

Здесь $\omega_b$, $\omega_a$ и $k$ — заданные постоянные. Ставится задача отыскания оптимального (в смысле минимума $Me^2(t)$) линейного демодулятора. Выписывается известное (Booton R. C., Proc. IRE, 1952, **40**, 977) интегральное уравнение для $u(\tau, t)$ — оптимальной переходной характеристики демодулятора. Уравнение решается в частном случае, когда имеют место равенства (1) и $\omega_b = \omega_c/2$, а $k=1$. При этом оно сводится к уравнению Винера — Хопфа

$$\varphi_m(\tau)\sin\omega_c\tau_1 = \int_0^\infty g(\tau_2)\,\varphi_m(\tau_2-\tau_1)\cos\omega_c(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_2,$$

где функция $g(\tau)$ связана с $u(\tau, t)$ соотношением $u(\tau, t) = \delta(\tau)\cos\omega_c t + g(\tau)\sin\omega_c t$. Для $Me^2(t)$ получено простое выражение $Me^2(t) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\sin^2\omega_c t$.

Решение уравнения для $u(\tau, t)$ в общем случае предлагается проводить численными методами.

Б. С. Цыбаков

**1 В176. Фильтрация случайной функции, среднее значение которой является линейной функцией.** Bêthoux Paul. Filtrage d'une fonction aléatoire dont la moyenne est une fonction linéaire. «C. r. Acad. sci.», 1959, **248**, № 26, 3685—3686 (франц.)

Пусть $Y(t) = a + bt + X(t)$ и $Y_1(t) = a + bt + X_1(t)$, где $a$ и $b$ — неизвестные параметры, а $X(t)$ и $X_1(t)$ — стационарные случайные процессы с нулевым средним значением, стационарно связанные между собой. Требуется на основании данных о значениях функции $Y_1(s)$ на интервале $t_0 - T \leqslant s \leqslant t_0$ построить наилучшее приближение $\hat{Y}(t_0+h)$ к значению $Y(t_0+h)$, $h>0$. Ограничиваясь лишь приближениями $\hat{Y}(t_0+h)$, линейно зависящими от $Y_1(s)$, и понимая слово «наилучшее» в смысле минимума среднеквадратичной ошибки, можно свести рассматриваемую задачу к несложной задаче теории функций, решение которой позволяет найти явное выражение для $\hat{Y}(t_0+h)$ в случае, когда спектральные плотности процессов $X(t)$ и $X_1(t)$ (включая и соответствующую взаимную спектральную плотность) являются рациональными функциями $\lambda$. Такое решение рассматриваемой здесь задачи вполне аналогично решениям ряда родственных задач, приведенным в статье референта (РЖМат, 1958, 4891). А. М. Яглом

**1 В177. Функция корреляции случайной последовательности прямоугольных импульсов.** Амиантов И. Н., Тихонов В. И. «Радиотехника», 1959, **14**, № 4, 9—19

Пусть $\psi(t)$ есть случайная последовательность независимых прямоугольных импульсов единичной высоты со случайными длительностями $\tau$ и случайными моментами $t_k$ появления $k$-го импульса; показано, что если $Q(\tau)$ — плотность вероятности длительности импульса и $W_k(\tau_1)$ — плотность вероятности случайной величины $t_k - \tau_0$, где $\tau_0$ — длительность 0-го импульса (считается, что $t_0 = 0$), то

$$M\psi(t+\Delta)\psi(t) = m_1\int_\Delta^\infty\left(1-\frac{\Delta}{\tau}\right)\frac{\tau}{M\tau}Q(\tau)\,d\tau +$$

$$+ m_1\sum_{k=1}^\infty\left\{\int_0^\Delta(\Delta-\tau_1)W_k(\tau_1)\,d\tau_1\int_{\Delta-\tau_1}^\infty\frac{Q(\xi)}{M\tau}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^\Delta d\tau_1\int_0^{\Delta-\tau_1}d\xi\,\frac{\xi+\tau_1+\zeta-\Delta}{M\tau}\,Q(\xi)\,Q(\zeta)\,W_k(\tau_1)\right\},$$

где $m_1 = M\psi(t)$. Даются частные примеры.

Е. Г. Гладышев

**1 В178. Плотность вероятности на выходе фильтра, когда на вход подается случайный телеграфный сигнал: метод дифференциальных уравнений.** McFadden J. A. The probability density of the output of a filter when the input is a random telegraphic signal: differential-equation method. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 228—233 (англ.)

Рассматривается задача об определении распределений вероятности величины

$$y(t) = \int_{t-\tau_1}^t W(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

где $x(t)$ — так называемый «случайный телеграфный сигнал» — случайный процесс, принимающий поочередно значения $+1$ и $-1$ на последовательности интервалов, покрывающей всю вещественную ось и имеющую граничными точками (т. е. точками скачка функции $x(t)$) случайную последовательность точек, распределенную по закону Пуассона с параметром $\beta$. Известно, что такой процесс $x(t)$ является марковским случайным процессом с корреляционной функцией $r(\tau) = e^{-\beta|\tau|}$; поэтому для вычисления характеристической функции величины $y(t)$ может быть применен метод Дарлинга и Зигерта (РЖМат, 1958, 7026) вычисления функционалов от значений марковского случайного процесса. В рассматриваемом случае этот метод приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau_1^2} + \left[2\beta + \frac{1}{W(\tau_1)}\frac{dW(\tau_1)}{d\tau_1}\right]\frac{d\varphi}{d\tau_1} + u^2W(\tau_1)\,\varphi = 0$$

относительно характеристической функции $\varphi(u, \tau_1)$ величины $y(t)$ (аргумент $y$ этой характеристической функции играет здесь роль параметра) со следующими начальными условиями:

$$\varphi(u, 0) = 0, \quad \left.\frac{d\varphi(u,\tau_1)}{d\tau_1}\right|_{\tau_1=0} = 0.$$

При $W(t) = T = \text{const}$ (где $0 \leqslant t \leqslant \tau_1$) или же $W(t) = e^{-t/T}/T$ (где $0 \leqslant t \leqslant \tau_1$) это дифференциальное уравнение легко решается; полученные решения анализируются и приводятся некоторые другие подходы к решению рассмотренных здесь задач. А. М. Яглом

**1 В179. Техника для измерения взаимной спектральной плотности двух случайных функций.** Uberoi Mahinder S., Gilbert Elmer G. Technique for measurement of crossspectral density of two random functions. «Rev. Scient. Instrum.», 1959, **30**, № 3, 176—180 (англ.)

Показывается, что вещественную и мнимую части взаимной спектральной плотности $f_{12}(\omega)$ двух процессов $e_1(t)$ и $e_2(t)$ можно получить, пропустив эти два процесса через узкополосные фильтры $K_1$ и $K_2$ с одинаковыми импульсными переходными функциями при измерении вещественной части $f_{12}(\omega)$ или же с импульсными переходными функциями, отличающимися лишь фазовым сдвигом в 90° (при измерении мнимой части $f_{12}(\omega)$), и подав затем процессы на выходе этих фильтров на вход коррелятора, измеряющего среднее значение произведения двух токов. Описываются технические детали прибора для измерения взаимной спектральной плотности и приводится соответствующая радиотехническая схема. Приводятся результаты проверки построенного прибора, осуществлявшейся при помощи применения его для измерения взаимной спектральной плотности двух процессов, полученных при пропускании белого шума через две простые линейные системы и имевших таким образом известные статистические характеристики. А. М. Яглом

**1 В180. Оптимальная фильтрация периодически импульсно-модулированных временных рядов.** Janos William A. Optimal filtering of periodic pulsemodulated time series. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 2, 67—74 (англ.)

Любой функции $f_i(t)$ может быть сопоставлена «периодически импульсно-модулированная» функция $g(t)\cdot f_i(t)$, где $g(t)$ — некоторая периодическая функция (с периодом $T$), обращающаяся в нуль всюду, кроме интервалов $mT \leqslant t \leqslant mT+h$, где $m$ — целое, $h<T$. Если мы пропустим такую модулированную функцию через фильтр с произвольной весовой функцией $W(\tau)$, то на выходе фильтра получим функцию $f_0(t)=\int_0^\infty W(\tau)\,g(t-\tau)\,f_i(t-\tau)\,d\tau$, причем соответствие $f_i(t)\to f_0(t)$ будет «стационарным» в том смысле, что «сдвинутой» функции $f_i(t+mT)$, $m$ — целое, на входе будет отвечать функция $f_0(t+mT)$ на выходе. По этой причине процесс $f_0(t)$ на выходе фильтра удобно рассматривать лишь в дискретные моменты времени $t=t_0+mT$, т. е. считать $f_0(t)$ временной последовательностью, аргумент которой принимает только значения $t_0+mT$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Принимается указанный здесь подход к задаче о прохождении периодически импульсно-модулированных процессов через линейный фильтр и исходя из него рассматривается обычная задача о фильтрации (ср., например, Лэнинг Дж., Бэттин Р., Случайные процессы в задачах автоматического управления, М., 1958); предполагается, что $f_i(t)=f_{is}(t)+f_{im}(t)+f_{in}(t)$, где $f_{is}(t)$ — линейная комбинация заданных функций: $f_k(t)$, $k=1,\ldots,N$, с неизвестными коэффициентами, а $f_{im}(t)$ и $f_{in}(t)$ — стационарные случайные процессы с нулевыми средними значениями и известными корреляционными функциями (включая и их взаимную корреляционную функцию); требуется найти весовую функцию $W(\tau)$ так, чтобы среднее значение процесса $f_0(t)$ в моменты $t_0+mT$ точно совпадало со средним значением в те же моменты времени некоторого линейного функционала $f_{Ds}(t)$ от процесса $f_{is}(t)+f_{im}(t)$, а средний квадрат уклонения $f_0(t_0+mT)$ от $f_{Ds}(t_0+mT)$ был наименьшим возможным. При этом еще дополнительно требуется, чтобы функции $f_k(t)$ все были «трансляционно инвариантны», т. е. чтобы все значения $f_k(\tau+mT)$ представлялись в виде линейных комбинаций значений $f_1(mT),\ldots,f_N(mT)$ (с коэффициентами, зависящими от $\tau$); последнее условие автоматически выполняется, если $f_{is}(t)$ — многочлен, или если $f_{is}(t)$ принадлежит к более общему, чем многочлен, классу функций, рассмотренному Блумом. Показывается, что при сделанных предположениях разыскание искомой функции $W(\tau)$ может быть сведено к решению модифицированного интегрального уравнения типа Винера—Хопфа, родственного уравнению, рассматривавшемуся Винером (см. цитированную выше книгу Лэнинга и Бэттина). Для случая, когда процесс $f_{im}(t)+f_{in}(t)$ имеет рациональную спектральную плотность, решение этого модифицированного уравнения типа Винера—Хопфа находится при помощи метода, развитого Заде и Рагаццини (Zadeh L., Ragazzini R., J. Appl. Phys., 1950, **21**, № 7, 645—655); окончательный вид функции $W(\tau)$ оказывается отличающимся от вида функции $W(t)$, решающей ту же задачу о фильтрации для стационарного процесса $f_{is}(t)+f_{im}(t)+f_{in}(t)$ (без модуляции его функцией $g(t)$) лишь добавлением соответственно подобранных комбинаций $\delta$-функции $\delta(t-mT)$ (и $\delta(t-mT-h)$) и ее производных для всех точек разрыва $t=mT$ и $t=mT+h$ функции $g(t)$. В заключение кратко описывается способ решения задачи о фильтрации по данным о значениях процесса на конечном интервале (т. е. при рассмотрении лишь функций $W(\tau)$, равных нулю при $\tau<T$) и приводится один конкретный пример фильтрации (по данным на всей полупрямой $t'\leqslant t$), для которого решение доводится до получения явных окончательных формул. А. М. Яглом

**1 В181. Нестационарное сглаживание и предсказание, использующие понятия теории электрических цепей.** Darlington Sidney. Nonstationary smoothing and prediction using network theory concepts. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, Spec. Suppl., 1—13 (англ.)

Метод Боде—Шеннона (Bode H. W., Shannon C. E., Proc. I. R. E., 1950, **38**, 417—425; см. статью этих авторов в сб. «Теория информации и ее приложения», М., Физматгиз, 1959) применяется к решению задачи об оптимальном (в смысле метода наименьших квадратов) линейном прогнозе значения нестационарного случайного сигнала $s(t)$ в момент $t_0+\alpha$ по значениям суммы $f(t)=s(t)+n(t)$ сигнала и шума при $t\leqslant t_0$. При этом предполагается, что сигнал и шум являются некоррелированными и что «процесс на входе» $f(t)$ и „предсказуемая часть сигнала» $\hat{s}(t)$ (где $\varepsilon(t)=s(t)-\hat{s}(t)$ — непредсказуемая «ошибка прогноза») могут быть получены пропусканием одного и того же белого шума $n_0(t)$ через два различных зависящих от времени физически реализуемых фильтра $F$ и $C$ (последнее условие, очевидно, является ограничением общего характера, накладываемым на корреляционные функции $B_{ff}(t_1,t_2)$ и $B_{ss}(t_1,t_2)$ процессов $f(t)$ и $s(t)$, точный смысл которого, однако, в статье не раскрывается). Далее предполагается еще, что фильтры $F$ и $C$ таковы, что функции $x(t)$ и $y(t)$ на их входе и выходе связаны друг с другом дифференциальными соотношениями вида

$$\left[\frac{d^n}{dt^n}+\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}\right]y(t)=$$

$$=h(t)\left[\frac{d^m}{dt^m}+\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}}\right]x(t)$$

с переменными коэффициентами; получаемый при этом класс нестационарных случайных процессов $f(t)$ и $\hat{s}(t)$ является естественным обобщением класса стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью. При известных импульсных переходных функциях фильтров $F$ и $C$ (т. е. известных коэффициентах $a_i(t)$, $b_j(t)$ и $h(t)$) решение задачи прогноза удается свести к решению некоторых линейных дифференциальных уравнений; наиболее сложной частью решения при этом оказывается «факторизация корреляционной функции $B_{ff}(t_1,t_2)$», т. е. представление этой функции в виде

$$B_{ff}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}K_f(t_1,\tau)\,K_f(t_2,\tau)\,d\tau,$$

где $K_f(t,\tau)=0$ при $\tau>t$ и тем же свойством обладает также и импульсная переходная функция $K_f^{-1}(t,\tau)$ фильтра, обратного к фильтру с переходной функцией $K_f(t,\tau)$ (аналог «факторизации спектра процесса», являющейся важнейшей частью винеровского решения задачи о прогнозировании значений стационарных процессов). Перечисляются три сравнительно широких (но все же частных) класса нестационарных процессов рассматриваемого здесь вида, для которых может быть указан эффективный метод выполнения этой «факторизации», т. е. оптимальный линейный прогноз может быть, во всяком случае в принципе, эффективно доведен до ответа. А. М. Яглом

**1 В182. Неравенство, касающееся огибающей корреляционной функции.** Karr Philip R. (An inequality concerning the envelope of a correlation function. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 1, 33 (англ.)

Пусть $w(\nu)$ — спектральная плотность некоторого случайного стационарного процесса и пусть

$$R(\tau)=\int_0^\infty w(\nu)\cos 2\pi\nu\tau d\nu$$

и

$$I(\tau) = \int_0^\infty w(\nu) \sin 2\pi\nu\tau d\nu.$$

Доказано, что $R(0) \geqslant \sqrt{R^2(\tau) + I^2(\tau)}$.

Б. С. Цыбаков

**1 В183. Статистическое описание совпадений в хаотических импульсных последовательностях.** Stein S., Johansen D. A statistical description of coincidences among random pulse trains. «Proc. I. R. E.», 1958, **46**, № 5, Part 1, 827—867 (англ.)

Рассматриваются случайные импульсные последовательности

$$\xi_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^{(i)}(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где импульсы $s_k^{(i)}(t)$ выражаются равенствами

$$s_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 1, & \tau_k^{(i)} < t < \tau_k^{(i)} + \theta_k^{(i)}, \\ 0, & t < \tau_k^{(i)},\ t > \tau_k^{(i)} + \theta_k^{(i)}. \end{cases}$$

Здесь $\tau_k^{(i)}$ — моменты возникновения и $\theta_k^{(i)}$ — длительности импульсов $s_k^{(i)}(t)$ ($i=1,\ldots,n$, $k=,\ldots,-1,0,1,\ldots$) — независимые случайные величины, удовлетворяющие условию $\tau_k^{(i)} - \tau_{k-1}^{(i)} - \theta_{k-1}^{(i)} > 0$. Считается, что $\theta_k^{(i)}$ ($k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) распределены одинаково. Ставится задача отыскания вероятностных характеристик случайного импульсного процесса $\zeta(t)$, определяемого равенствами

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & \text{для } t, \text{ при которых } \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) = n, \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases}$$

В предположении, что для процессов $\xi_i(t)$ известны величины $Q_i(x)$, выражающие среднее число импульсов на единицу времени, длительность которых больше $x$, показано, что аналогичная величина $Q(x)$ для процесса $\zeta(t)$ выражается формулой

$$Q(x) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \int_x^\infty Q_i(\tau)\, d\tau \right\} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(x)}{\int_x^\infty Q_i(\tau)\, d\tau}.$$

Приводятся также формулы для средней длительности импульсов в процессе $\zeta(t)$. Б. С. Цыбаков

**1 В184. Оценка пропускной способности некоторых реальных каналов связи.** Овсеевич И. А., Пинскер М. С. «Радиотехника», 1958, **13**, № 4, 15—25

Рассматривается ситуация, в которой сигнал на выходе канала связи $\eta(t)$ формируется из посылаемого сигнала $\xi(t)$ согласно равенству $\eta(t) = [A\,\xi(t)]\nu(t) + \zeta(t)$, где $\nu(t)$ — параметрический эффект, $A$ — линейный оператор, а $\zeta(t)$ — гауссовский аддитивный шум. Функции $\xi(t)$, $\nu(t)$ и $\zeta(t)$ — взаимно независимые случайные стационарные процессы. На основе методики, развитой авторами ранее (Радиотехника, 1957, **12**, № 10), строится оценка пропускной способности каналов при некоторых ограничениях, наложенных на $\nu(t)$. Получены оценки для пропускной способности канала в случае $\nu(t) = \nu$, где $\nu$ — случайная величина с заданной дисперсией $\sigma_\nu^2$ и средним значением $a_\nu$. Указывается, как связаны $\sigma_\nu^2$ и $a_\nu$ с коэффициентом передачи канала — функцией $\Phi(i\omega) = [\bar{A}\, e^{i\omega t}]\nu(t) + \zeta(t)$. Рассмотрен канал, в котором спектральная плотность процесса $\nu(t)$ равномерна $f_{\nu\nu}(\omega) = f_{\nu\nu}$. При этом оценка для пропускной способности $C$ принимает вид

$$C \geqslant \frac{1}{4\pi} \int_{-w}^{w} \log \frac{\psi^2(\omega) K d\omega}{2\pi P_c f_{\nu\nu} + f_{\zeta\zeta}(\omega)},$$

где $P_c$ — заданная средняя мощность сигнала, равная дисперсии процесса $\xi(t)$, $f_{\zeta\zeta}(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\zeta(t)$, $\psi^2(\omega)$ — модуль среднего значения коэффициента передачи, а $K$ — константа, определяемая из приведенного в работе функционального уравнения. Вычисляется оценка для пропускной способности канала в предположении, что спектральная плотность процесса $\nu(t)$ есть $f_{\nu\nu}(\omega) = \sigma_\nu^2(\omega)\delta(\omega) + f_{\nu\nu}$, где $\delta(\omega)$ — дельта-функция. В работе приводится более строгий вывод результата, полученного Файнстейном (Feinstein J. J., Appl. Phys., 1955, **26**, № 2) и касающегося приближенного вычисления информации одного случайного вектора относительно другого в случае, когда совместное распределение векторов мало отличается от нормального. Б. С. Цыбаков

**1 В185. Статистическая фильтрация и прогнозирование.** Lee Y. W. Statistical filtering and prediction. «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 430—454 (англ.)

Статья является содержанием трех лекций из курса Теории информации, посвященных вопросам фильтрации и прогнозирования в винеровском смысле. Автор без всяких претензий на полноту и строгость выводит уравнение Винера—Хопфа и исследует его решение. Общие результаты наглядно иллюстрируются на примерах. Ничего нового ни фактически, ни методологически статья не содержит. В. А. Маковский

**1 В186. Интерференция и когерентность акустических сигналов.** Фурдуев В. В. «Акуст. ж.», 1959, **5**, № 1, 111—116

Средняя за время $T$ мощность суммы сигналов $f(t)$ и $f(t-\tau)$ пропорциональна $P(t)$. $P(t) = P_0(t) + P_\tau(t) + 2r(t, \tau)$, где

$$P_0(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f^2(x)\, dx; \quad P_\tau(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f^2(x-\tau)\, dx;$$

$$r(t, \tau) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f(x)\, f(x-\tau)\, dx.$$

В случае, когда $r(t, \tau) = 0$, сигналы $f(t)$ и $f(t-\tau)$ называются некогерентными. В противном случае сигналы называются когерентными и при их сложении происходит интерференция. Исследуется интерференция периодических речевых и музыкальных сигналов в случае, когда приемное устройство представляет собой квадратичный детектор и следующий за ним фильтр с экспоненциальной переходной характеристикой. Б. С. Цыбаков

**1 В187. Применение экспоненциальных функций для определения безынерционных нелинейных операторов.** Lory H. J., Lai D. C., Huggins W. H. On the use of growing harmonic exponentials to identify static nonlinear operators. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 4, 93—101 (англ.)

Физическая система описывается простейшим безынерционным нелинейным оператором вида

$$f = dx^3 + mx^2 + hx, \qquad (1)$$

где $x(t)$ — функция, определяющая сигнал на „входе“ системы, $f(t)$ — функция, определяющая сигнал на „выходе“ системы, $d, m, h$ — некоторые неизвестные параметры. Решается задача определения $d, m, h$, если известны функции $x(t)$ и $f(t)$. Для этого система возбуждается сигналом $x(t) = e^t$ и выходной сигнал, определяемый формулой $f(t) = he^t + me^{2t} + de^{3t}$, подается на „идеальный фильтр“, позволяющий разделить компоненты $he^t$, $me^{2t}$ и $de^{3t}$. Тогда величины $h, m, d$, очевидно, равны значениям соответствующих компонент на „выходе“ идеального фильтра при $t = 0$.

Далее рассматривается задача аппроксимации произвольного безынерционного нелинейного оператора кривой третьего порядка (1). За меру близости приближенного оператора к точному выбирается величина

$$E(0)=\int_{-\infty}^{0}\{f(t)-f'(t)\}^2dt=\int_0^1\{F(x)-F'(x)\}\frac{1}{x}dx, \quad (2)$$

где $F(x)$ — произвольный безынерционный оператор, $F'(x)=h'x+m'x^2-d'x^3$. Значения $h'$, $m'$, $d'$ выбираются из условия минимума $E(0)$. Рассматриваются примеры определения операторов и практическая схема идеального фильтра, набираемого на электронной модели. Приводится сравнение метода определения операторов, рассмотренного в работе, с методом синусоидальных входных сигналов. Библ. 6 назв. Ю. П. Леонов

**1 В188. Сравнение методов радиолокационного приема с точки зрения теории информации.** Тарасенко Ф. П. «Радиотехника», 1959, **14**, № 7, 63—70

Предлагаются критерии качества радиолокационного обнаружения, основанные на шенноновском выражении для информации одного случайного объекта относительно другого. Б. С. Цыбаков

**1 В189. Скорость ошибок при передаче данных.** Reiger Siegfried. Error rates in data transmission. «Proc. I.R.E.», 1958, **46**, № 5, Part 1, 919—920 (англ.)

По каналу связи требуется передавать случайную величину $\xi$, принимающую $2^k$ значений с равными вероятностями. В работе рассматриваются следующие три различных способа передачи: 1) каждому значению $\xi$ сопоставляется сигнал, состоящий из $k$ бинарных символов $y_i^{(1)}(t)$ $(i=1, 2)$; 2) каждому значению $\xi$ сопоставляется сигнал, состоящий из $n\,(n>k)$ бинарных символов $y_i^{(2)}(t)$ $(i=1, 2)$; в этом случае используются корректирующие бинарные коды, позволяющие исправить $(2^{n-k}-1)$ комбинаций ошибок; 3) каждому значению $\xi$ сопоставляется один из сигналов $y_i^{(3)}(t)$ $(i=1, 2, \ldots, 2^k)$. Предполагается, что в канале действуют аддитивные гауссовские шумы с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2$. Считается, что мощность сигналов $y_i^{(1)}(t)$ есть $E_1=E$, сигналов $y_i^{(2)}(t)$ есть $E_2=k/nE$, а мощность сигналов $y_i^{(3)}(t)$ равна $E_3=kE$. В качестве декодирующего устройства на выходе канала рассматривается система параллельно соединенных звеньев, каждое из которых состоит из оптимального фильтра, настроенного на сигнал $y_i(t)$ и следующего за ним детектора огибающей. Правило декодирования заключается в том, что считается посланным сигнал $y_i(t)$, если в момент окончания периода действия сигнала значение, принятое случайным процессом на выходе звена, соответствующего $y_i(t)$, — наибольшее. Плотность распределения вероятностей на выходе звена с фильтром, настроенным на $y_i(t)$ при подаче на вход канала сигнала $y_i^{(j)}(t)$ есть

$$p(y)=y\exp\left(-\frac{y^2+2\beta_j}{2}\right)I_0(y\sqrt{2\beta_j}),$$

где $I_0(y)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, а $\beta_j=E_j/\sigma^2$. В работе найдено выражение для вероятности $p_M^{(j)}$ $(m=1, 2, 3)$ ошибочного решения при декодировании одного символа

$$p_M^{(j)}=\frac{\exp(-\beta_j)}{M}\sum_{r=2}^{M}(-1)^r\binom{M}{r}\exp\left(\frac{\beta_j}{r}\right).$$

В качестве примера, иллюстрирующего полученный результат, рассмотрен телетайпный канал с $k=5$ и $n=16$. Для этого случая показано, что наилучшим из трех рассмотренных способов передачи является третий ($m=3$). Б. С. Цыбаков

**1 В190. Двоичные решающие системы с обратной связью для обеспечения надежности в условиях изменяющейся силы сигнала.** Harris B., Hauptschein A., Morgan K. C., Schwartz L. S. Binary decision feedback systems for maintaining reliability under conditions of varying signal strength. «Proc. Nat. Electronics Conf. Vol. 13. Chicago, Nat. Electronics Conf., Inc.», 1958, 126—140 (англ.)

Авторы рассматривают следующую систему кодирования и декодирования последовательности сообщений $\xi_n$ со значениями $+1$ и $-1$ при передаче по бинарному симметричному каналу без памяти с аддитивным гауссовским шумом. Задаются числа $k$. Пусть в момент $s$ передается сообщение $\xi_n$. Полагаем сигнал на входе $\eta_s=\xi_n$; если сигнал на выходе $\tilde{\eta}_s$ таков, что $|\tilde{\eta}_s|>k$, то полагаем сообщение на выходе $\tilde{\xi}_n=\operatorname{sgn}\tilde{\eta}_s$ и далее $\eta_{s+1}=\xi_{n+1}$, т. е. передаем очередное сообщение; если $|\tilde{\eta}_s|\leqslant k$, то сигнал $\tilde{\eta}_s$ признается „неразличимым“ и об этом по каналу обратной связи (предполагается, что в нем шумы отсутствуют и вероятность ошибки равна нулю) оповещается отправитель; тогда $\eta_{s+1}=\xi_n$, т. е. передача сообщения повторяется. Пусть $P$ — мощность сигнала на выходе, $N$ — средняя мощность шума; $A=\sqrt{P/2N}$; $K=k/\sqrt{2N}$; $p_e(A)$ — вероятность ошибки; $p_e=p_e(A)$, $m$ — число принятых сообщений, $s$ — общее время передачи; $T_s=s/m$, $R=\overline{A^2}$. Минимум $p_e$ при фиксированном $T_s$ достигается при $K(A)=C/A$. Если $A$ распределено по закону Релея с плотностью вероятностей $\frac{2A}{R}e^{-\frac{A^2}{R}}$, $(R=\overline{A^2})$, то

$$T_s^2=4\beta^2\frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{(\beta+1)^{\beta+1}}\frac{(1-p_e)^{\beta+1}}{p_e^{\beta-1}},$$

где $\beta=1+R^{-1}$. Проводится сравнение указанного метода с некоторыми другими методами кодирования сообщений. А. А. Темпельман

**1 В191. Теоретический анализ улучшения за счет разнесения при частотной манипуляции.** Pierce John N. Theoretical diversity improvement in frequency-shift keying. «Proc. I.R.E.», 1958, **46**, № 5, Part 1, 903—910 (англ.)

По каналу связи в условиях, когда имеют место релеевские замирания, передается дискретная информация с помощью частотной манипуляции. Передача состоит из случайной последовательности следующих друг за другом импульсов $\alpha\sin(\theta t-\varphi)$, где $\alpha$ — амплитуда импульсов, а $\theta$ и $\varphi$ — случайные частота и фаза посылки. Величина $\theta$ принимает значение $\omega_1$ или $\omega_2$ на интервале длительности импульса $T$. Замирания в канале проявляются в том, что в течение длительности импульса величина $\alpha$ является случайной величиной, распределенной по релеевскому закону. В канале действует аддитивный гауссовский шум с равномерной спектральной плотностью. Прием посылок производится $M$ приемниками, расположенными в различных точках пространства (разнесение по пространству). В каждом приемнике имеются два оптимальных фильтра: один — настроенный на сигнал $s_1=\alpha\sin(\omega_1 t-\varphi)$, другой — на сигнал $s_2=\alpha\sin(\omega_2 t-\varphi)$. Считается, что был принят сигнал $s_i$ $(i=1, 2)$, если условная вероятность того, что принятые $M$ приемниками сигналы были вызваны посылкой $s_i$, будет больше условной вероятности того, что эти сигналы вызваны посылкой $s_j$ $(j\neq i)$. Предполагается, что взаимно независимы аддитивные шумы в приемниках, аддитивные шумы в фильтрах приемников и величины амплитуд посылок, поступающих на входы различных приемников. В работе отыскивается вероятность ошибки при передаче, отнесенная к одной посылке. Показано, что средняя вероятность ошибки $p(e)$ выражается формулой

$$p(e) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(2M-1)!\,(-1)^m \left(2+\frac{s_0 T}{n_0}\right)^{-M-m}}{(M-1)!\,(M-1-m)\,(M+m)\,m!},$$

$s_0$ — средняя энергия посылки. В предположении, что на приемном конце точно известны значения $\alpha$ и $\varphi$ для посылок (когерентный прием), показано, что

$$p(e) = \int \frac{\sigma^{M-1} d\sigma}{s_0^M (M-1)!}\, e^{-\frac{\sigma}{s_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{\sigma T}{2n_0}}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

В работе приводятся также вычисления $p(e)$ для случая, когда шумы и замирания в каналах являются зависимыми. Полученные громоздкие выражения для $p(e)$ проиллюстрированы на графиках.

Б. С. Цыбаков

**1 В192. Вычисление неопределенности Шеннона в бинарном коде.** Loeb Julien. Le calcul de l'ambiguité de Shannon en code binaire. «Synthese», 1959, **11**, № 2, 112—118 (франц.)

С точки зрения инженера-связиста рассматривается пропускная способность бинарного канала с шумом.

Э. Г. Рузайкин

**1 В193. Марковский процесс огибающей шума.** Pierce John N. A Markoff envelope process. «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, **4**, № 4, 163—166 (англ.)

Пусть $I(t)$ — узкополосный стационарный гауссовский шум, спектр которого имеет „центральной точкой" круговую частоту $\omega_m$. В таком случае $I(t)$ можно представить в виде $I(t) = I_c(t)\cos\omega_m t - I_s(t)\sin\omega_m t$, где $I_c(t)$ и $I_s(t)$ — медленно меняющиеся (по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega_m$) стационарные процессы; процесс $R(t) = \left[I_c^2(t) + I_s^2(t)\right]^{1/2}$ тогда называется „огибающей" шума $I(t)$. В известной работе Райса (см. сб. „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех", Изд-во ин. лит. М., 1953) найдены одномерная и двумерная плотности распределения вероятностей для процесса $R(t)$; обобщению этих результатов на случай $n$-мерных плотностей посвящены работы Каца и Зигерта (Kac M., Siegert A. J. F., J. Appl. Phys., 1947, **18**, 396—397) и Хофмана (РЖМат, 1955, 4601), в которых, однако, не получено явных окончательных выражений для такой плотности. Показывается, что такие явные выражения можно получить, если считать, что $I(t)$ является не произвольным узкополосным гауссовским стационарным процессом, а процессом со спектральной плотностью вида $w(\omega) = k/[\alpha^2 + 4(\omega - \omega_m)^2]$, $\omega_m/\alpha \geqslant 1$ (постоянная $\alpha$, очевидно, задает полуширину спектра процесса $I(t)$); плотность $p_n(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ здесь несложно выражается через экспоненциальные и бесселевы функции. Доказывается, что в этом случае процесс $R(t)$ оказывается марковским случайным процессом; отмечается, что последний результат, по-видимому, имеет отношение к некоторым общим результатам Дуба (Doob J. L., Ann. Math., 1942, **43**, 351—369).

А. М. Яглом

**1 В194. Обобщение метода Шинброта определения оптимальной функции веса при нестационарных случайных воздействиях, когда помеха — белый шум.** Ли Хен Вон. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1959, № 4, 177—187

Рассматривается задача об оптимальной линейной фильтрации сигнала $s(t) = g(t) + m(t)$, где $g(t)$ — многочлен, а $m(t)$ — нестационарный случайный процесс с корреляционной функцией вида $R_m(t, \tau) = \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu(t)\, b_\nu(\tau)$, по значениям на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ суммы $s(t) + n(t)$, где $n(t)$ — белый шум. Задача сводится к решению интегрального уравнения специального вида; это решение проводится с помощью метода, развитого (в применении к несколько более простой задаче) Шинбротом (РЖМат., 1959, 479). В заключение разбираются три конкретных примера, иллюстрирующих предложенный метод.

А. М. Яглом

**1 В195. Фильтрация нестационарных процессов.** Šefl Otakar. Filtration of non-stationary processes. «Acta techn. (ČSR)», 1959, **4**, № 2, 139—146 (англ., рез. русск.)

Изучается задача о фильтрации нестационарного случайного процесса $x(t,\omega)$, представляющего собой сумму «сигнала» вида $f(a,t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(t)$ (где $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t)$ — заданные линейно независимые функции) и некоррелированного с ним стационарного «шума» $n(t,\omega)$ с нулевым средним значением, заданной корреляционной функцией и фиксированным распределением вероятностей $dP(\omega)$ в $\Omega$. Задача о фильтрации рассматривается как игра, где множество $F$ стратегий первого игрока совпадает с множеством распределений вероятностей $F$ в $N$-мерном пространстве $E_N$ векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, а множество стратегий второго игрока — с множеством линейных функционалов $\xi(\omega)$ относительно значений процесса $x(t,\omega)$ на заданном «интервале наблюдения» $I$ (в дальнейшем, впрочем, обычно считается, что $I$ — это конечное множество точек); цена игры определяется как второй момент $\rho(F,\xi) = \int_{E_N} \int_{\Omega} [\xi(\omega) - f(a,s)]^2\, dP(\omega)\, dF(a)$.

Доказываются некоторые общие свойства поставленной игровой задачи и показывается, что при определенных условиях единственное минимаксное решение здесь совпадает с решением Заде—Рагаццини (Zadeh L. A., Ragazzini R., J. Appl. Phys., 1950, **21**, № 10, 645—655) — несмещенным решением, для которого минимален средний квадрат ошибки фильтрации. В качестве конкретного примера рассматривается задача об определении среднего значения стационарного процесса (т. е. о фильтрации суммы постоянного «сигнала» и стационарного «шума») по значениям процесса в конечном числе точек и непосредственно показывается, что решение, отвечающее минимуму «цены игры», стремится к несмещенному решению, когда дисперсия постоянного слагаемого $a$ стремится к бесконечности; отсюда сразу следует, что несмещенное решение в этом случае является минимаксным.

А. М. Яглом

**1 В196. О среднеквадратичной мощности шума на выходе оптимального числового линейного фильтра при коррелированном шуме на входе.** Blum Marvin. On the mean-square noise power of an optimum linear digital filter for correlated noise input. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 2, 58—61 (англ.)

Рассматривается следующая задача оптимальной фильтрации: пусть нам известны значения «процесса на входе» $e(t) = P(t) + N(t)$ (где $P(t)$ — многочлен не выше заданного порядка $n$ с неизвестными коэффициентами, $N(t)$ — стационарный случайный шум с заданной корреляционной функцией $MN(t)\,N(s) = \sigma_N^2 \rho(t-s)$, $\rho(0) = 0$) в моменты $t_k = kT$, $k = 0, 1, \ldots, m$; требуется определить линейную комбинацию этих значений, дающее несмещенное наилучшее (в смысле минимума среднеквадратичной ошибки) приближение к заданному линейному функционалу $S^*$ от значений $P(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, m + \alpha$ (где $\alpha$ — любое целое число). Наряду с решающим эту задачу оптимальным фильтром $\widetilde{W}$ строится еще один линейный фильтр $\hat{W}$, который был бы оптимальным, если бы все значения шума $N(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, были некоррелированными величинами (с тем же среднеквадратичным значением $\sigma_N$, которое они имеют на самом деле); этим послед

ним фильтром естественно пользоваться в тех, весьма частых на практике, случаях, когда корреляционная функция $\rho(t-s)$ нам неизвестна. Пусть $\widetilde{\sigma}^2_m$ — средний квадрат ошибки при фильтрации процесса $e(t)$ при помощи фильтра $\widetilde{W}$, а $\hat{\sigma}^2_m$ — тот же средний квадрат при фильтрации этого процесса при помощи фильтра $\hat{W}$; наконец, через $\sigma^2_m$ обозначается средний квадрат ошибки при фильтрации при помощи фильтра[a] $\hat{W}$ процесса $e_1(t)=P(t)+N_1(t)$, где $N_1(t_k)$ — взаимно независимые случайные величины со средним квадратом $\sigma^2_N$. Доказывается, что если спектральная плотность $f(\lambda)$ шума $N(t_k)$ является всюду отличной от нуля и кусочно-непрерывной, то

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\hat{\sigma}^2_m}{\widetilde{\sigma}^2_m}=1,\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{\sigma}^2_m}{\sigma^2_m}=2\pi\cdot f(0). \qquad (1)$$

Отмечается, что для того, чтобы отношения $\hat{\sigma}^2_m/\widetilde{\sigma}^2_m$ и $\widetilde{\sigma}^2_m/\sigma^2_m$ можно было заменить их асимптотическими значениями (1), надо только, чтобы $mT$ было значительно больше характерного «времени корреляции» шума $N(t)$; этот результат подтверждается рассмотрением одного конкретного примера. Результаты настоящей статьи являются обобщением известных результатов Гренандера и Розенблатта (РЖМат, 1960, 9304), рассматривавших задачу о наилучшем определении коэффициентов многочлена $P(t)$ по данным о значениях суммы $P(t)+N(t)$; доказательство, приведенное в статье, также весьма близко к доказательствам, имеющимся в указанной книге Гренандера и Розенблатта. А. М. Яглом

**1 В197. Четвертые моменты бесконечно урезанного шума.** McFadden J. A. The fourth product moment of infinitely clipped noise. «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, **4**, № 4, 159—162 (англ.)

Пусть $\xi(t)$ — стационарный эргодический процесс с нулевым средним значением. Бесконечно урезанным процессом $\xi(t)$ называется процесс $x(t)$, определяемый следующим образом:

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{при } \xi(t)\geqslant 0,\\ -1 & \text{при } \xi(t)<0.\end{cases}$$

Ставится вопрос об определении четвертого момента

$$W(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)=Mx(t)\,x(t+\tau_1)\,x(t+\tau_2)\,x(t+\tau_3),\quad 0<\tau_1<\tau_2<\tau_3.$$

В связи с тем, что для гауссовских процессов $\xi(t)$ этот момент не удается получить в замкнутом виде, рассматриваются следующие две искусственные модели процесса $x(t)$:1) «Пуассоновская модель», в которой скачки процесса $\xi(t)$ представляют собой совокупность случайных точек, распределенную на оси $-\infty<t<\infty$ по закону Пуассона с параметром $\alpha$ и 2) «Сложная пуассоновская модель», в которой эти скачки представляют собой последовательность точек, полученную из такой пуассоновской совокупности $\ldots t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$ отбрасыванием всех точек с четными номерами. Доказывается, что в случае 1)

$$w(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)=e^{-2\alpha\tau_1-2\alpha(\tau_3-\tau_2)},$$ а в случае 2)

$$w(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)=e^{-\alpha[\tau_1+(\tau_3-\tau_2)]}\left[\cos\alpha\tau_1\cos\alpha(\tau_3-\tau_2)-e^{-2\alpha(\tau_2-\tau_1)}\sin\alpha\tau_1\sin\alpha(\tau_3-\tau_2)\right].$$

В заключение обсуждается вопрос о том, в какой мере эти формулы могут использоваться в качестве приближенных выражений для моментов $w(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$, отвечающих каким-либо примерам бесконечно урезанного гауссовского процесса $\xi(t)$. А. М. Яглом

**1 В198. Относительно одномерной вероятности обнаружения в радиолокационном приемнике.** Stone W. M., Brock R. L., Hammerle K. J. On the first probability of detection by a radar receiver system. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 1, 9—11 (англ.)

Рассматривается радиотехническое устройство, представляющее собой последовательно включенные фильтр — квадратичный детектор—фильтр. На вход устройства поступает узкополосный сигнал—случайный процесс с релеевским распределением огибающей в смеси с аддитивным гауссовским шумом. Считается, что частотные характеристики первого и второго фильтров есть

$$F_1(\omega)=\left[1-j\frac{\omega-\omega_0}{\omega_1}\right]^{-1}+\left[1+j\frac{\omega+\omega_0}{\omega_1}\right]^{-1}$$

и

$$F_2(\omega)=\left[1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right]^{-1},$$

где $\omega_1$ и $\omega_2$ — некоторые фиксированные частоты, а $\omega_0=k\omega$, при $k\gg 1$.

Ставится задача отыскания одномерной функции распределения $P(x)$ процесса на выходе второго фильтра. Для этого применяется метод, изложенный в работе Каца и Зигерта (Kac M., Siegert A. J. F., J. Appl. Phys., 1947, **18**, 383—397), основанный на решении интегральных уравнений с ядром, зависящим от выражения типа свертки функций $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$. Опуская промежуточные выкладки, авторы приводят окончательный ответ:

$$P(x)=\frac{(2\gamma/z)^{(2\gamma-1)/2}\ \exp(-x/z)}{\Gamma(2\gamma)\,J_{2\gamma-1}\ [2(2\gamma/z)^{1/2}]},$$

справедливый для достаточно больших $\gamma=\omega_1/\omega_2$. Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $J_n(x)$ — функция Бесселя $n$-го порядка, а $z$ — отношение второго момента сигнала ко второму моменту аддитивного шума на входе первого фильтра.

В статье также приводится формула для $P(x)$ в случае, когда $F_1(x)$ имеет более сложную структуру, являясь частотной характеристикой двух связанных $LC$-фильтров. Б. С. Цыбаков

**1 В199. Расчет переходных функций цепи без обратной связи по измерениям, выполненным при включенной обратной связи.** Goodman N. R., Katz S. Calculating open loop transfer functions from closed loop measurements. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1958, 5, № 3, 289—297 (англ.)

Рассматривается линейная система уравнений

$$\begin{aligned} g&=L(f-a)+v,\\ f-a&=Mg+u, \end{aligned} \qquad (1)$$

где функции $f$, $g$, $a$, $v$, $u$ — случайные стационарные и стационарно связанные временные последовательности, а $L$ и $M$ — линейные операторы. Уравнения (1) описывают некоторую систему с обратной связью, состоящую из двух звеньев. Звено прямой связи есть линейный прибор, описываемый оператором $L$. Звеном обратной связи служит линейный прибор, описываемый оператором $M$. Функция $f$ имеет смысл процесса на входе звена $L$; функция $a$ — инструментальная ошибка, возникающая при измерении $f$; функция $g$—процесс на входе звена $M$; функция $v$ — сторонние аддитивные шумы на входе звена $M$; функция $u$ — шумы на входе звена $L$. Считаются поддающимися измерению процессы $f$, $g$, $a$ и коэффициент передачи $\mu=\mu(\omega)$ звена $M$. Ставится задача определения коэффициента передачи $\lambda=\lambda(\omega)$ звена $L$ и спектральных плотностей шумов $u$ и $v$. Получая на основании уравнений (1) соотношение между спектральными плотностями рассматриваемых процессов, с помощью несложных алгебраических преобразований, автор приходит к решению поставлен-

ной задачи в случае, когда процессы $a$ и $f$, $a$ и $g$, $u$ и $v$ являются некоррелированными. При этом для $\lambda$ получено выражение

$$\lambda = \frac{\overline{S}_{fg} - \overline{\mu} S_g}{S_f - S_a - \overline{\mu}\mathfrak{S}_{fg}},$$

где $S$ — взаимные и спектральные плотности процессов, соответствующих подстрочечным индексам, а черта означает комплексно сопряженную функцию. Приводится числовой пример, иллюстрирующий изложенную методику вычислений. Б. С. Цыбаков

**1 В200. Приближенное выражение вероятности правильного обнаружения при оптимальном приеме сигнала с неизвестной фазой.** Бунимович В. И. «Радиотехн. и электроника», 1958, 3, № 4, 552—554

При использовании отношения максимального правдоподобия вероятность правильного обнаружения синусоидального сигнала со случайной равномерно распределенной фазой на фоне гауссовских шумов с равномерной спектральной плотностью $N$ выражается интегралом (РЖМат, 1957, 2564)

$$D(z, s) = \int_z^\infty x e^{-(x^2+s^2)/2} I_0(s, x)\, dx,$$

здесь $z$ — пороговое значение сигнала, а $s = zE/N$, где $E$ — энергия сигнала за период наблюдения. В работе найдено следующее асимптотическое разложение для $D(z, s)$:

$$D(z, s) = \frac{1}{2\pi}\int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \left\{\frac{1}{2s} - \frac{u}{8s^2} + \frac{u^2+1}{16s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right)\right\}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

где $u = z - s$. Б. С. Цыбаков

**1 В201. О потенциальной помехоустойчивости при учете замираний и шумов в канале связи.** Кловский Д. Д. «Тр. Научно-техн. конференции Ленингр. электротехн. ин-та связи». Вып. 3. Л., 1959, 11—22

Методы статистических решений применяются для извлечения периодического случайного сигнала из его смеси с шумом. Б. С. Цыбаков

**1 В202. Одна задача в теории марковских цепей и ее приложение в теории траффика.** Икено. «Дэнки цусин гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Commun. Engrs Japan», 1956, 39, № 1, 26—32 (японск.)

Автор представляет работу телефонной сети конечной цепью Маркова и показывает, что в случае показательного распределения времени занятости абонента дисперсия числа отказов больше, чем в случае фиксированного времени. Liu Chang Wen

**1 В203. Эксперименты, имитирующие траффик в двухступенчатой связанной системе с использованием электронной цифровой машины.** Wallström Bengt. Artificial traffic trials on a twostage link system using a digital computer. «Ericsson Techn.», 1958, 14, № 2, 259—289 (англ.)

Описан эксперимент, поставленный на шведской электронной цифровой машине БЭСК для решения задачи из теории массового обслуживания методом Монте-Карло. Эксперимент проведен с использованием двухступенчатой связанной системы, представляющей собой групповой переключатель, определяющий процесс в некоторой системе $C$ из $m \times \nu$ элементов, расположенных в $m$ строках и $\nu$ столбцах. Процесс строится по следующим правилам: свободный вход $i$-го столбца ступени $A$ $(n \times k)$ имеет постоянную вероятность вызова $y_i$, занятый вход — нулевую вероятность вызова; время ожидания распределено экспоненциально с общим средним $s$ во всех столбцах ступени $B(m \times k)$ и в реализациях процесса. Две последовательности $\{Q_i\}$ и $\{R_i\}$ равномерно распределенных псевдослучайных чисел используются первая для определения порядка проведения эксперимента, т. е. выбора одного из следующих направлений: переход к новому вызову, переход к определению длительности вызова, переход к получению информации о загруженности системы; вторая — для определения направления вызова. Изучено влияние способа выбора (случайный или закономерный) и числа строк и столбцов в $C$ на загруженность системы и на время ожидания. В результате эксперимента получены оценки вероятности ожидания при вызове и среднего времени ожидания в системе. Для случая $m=1$ аналитически получены точные оценки этих величин, для произвольного $m$ — приближенные. Проведено сравнение экспериментальных данных с данными, полученными по формулам. В. А. Михайлов

**1 В204. Распределение объема очереди в проблемах очередей.** Finch P. D. On the distribution of queue size in queueing problems. «Acta math. Acad. scient. hung.», 1959, 10, № 3-4, 327—336 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается система $G1/G/m$ (РЖМат, 1956, 3218). $\{t_n\}$ — моменты прибытия покупателей. $\tau_n = t_m - t_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots, t_0 = 0$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины с абсолютно непрерывной функцией распределения и конечным математическим ожиданием. Дана последовательность $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых, одинаково распределенных неотрицательных величин с абсолютно непрерывной функцией распределения. $\{s_n\}$ называется последовательностью времен обслуживания и предполагается независимой от потока $\{t_n\}$. Имеется $m$ продавцов $(m \geqslant 1)$ и время обслуживания покупателя, прибывшего в момент $t_n$, есть $S_n$ (не зависит от продавца). Говорим, что система находится в состоянии $E_k (k=0, 1, 2, \ldots)$, если имеется $k$ покупателей, и определим случайную величину $\eta(t) : \eta(t) = k$, если в момент $t$ система в $E_k$; $\eta_n = \eta(t_n - 0)$. Пусть $\omega_n$ — время ожидания покупателя, который прибыл в момент $t_n$, $\zeta_n = \eta(t_n + \omega_n + s_n + 0)$. $P_k(t) = P(\eta(k) = t)$; $Q_k(n) = P(\eta_n = k)$; $R_k(n) = P(\zeta_n = k)$. В работе определяются предельные распределения для $P_k(t)$; $P(\eta(t + \delta t) = \eta(t) + 1 \mid \eta(t) = k)_{k=0,1,2,\ldots}$; $P(\eta(t + \delta t) = \eta(t) - 1 \mid \eta(t) = k)_{k=1,2,3,\ldots}$. Находятся предельные распределения $\{Q_k\}$ и $\{R_k\}$ и указывается на их идентичность. В. И. Бабкин

**1 В205. Статистическая модель некоторых временных рядов.** Palmer D. S. A statistical model of some time series. «Nature», 1958, 181, № 4624, 1677 (англ.)

В работе Херста (РЖМат, 1958, 5049) было указано, что для многих временных рядов, описывающих природные явления (расходы воды в реках, выпадение осадков и т. д.), среднее значение суммы $R$ абсолютных отклонений $N$ последовательных членов ряда от среднего арифметического этих $N$ значений хорошо аппроксимируется формулой $R = \sigma (N/2)^K$, где $\sigma^2$ — дисперсия членов ряда, а $K$ близко к 0,73. Отмечается, что величина $R$ при большом $N$ тесно связана с стандартным уклонением суммы $N$ последовательных членов ряда. В случае ряда независимых величин, очевидно, $R \sim \sigma \sqrt{N}$, а для стационарной последовательности коррелированных величин $R \sim \sigma N \sqrt{u(N)}$, где $\sigma^2 u(N)$ — дисперсия среднего арифметического $N$ последовательных членов ряда. Асимптотическое поведение $u(N)$ при $N \to \infty$ определяется поведением соответствующей спектральной плотности $f(\omega)$ вблизи нуля; в частности, эмпирическое правило Херста (точнее говоря, правило $R \sim \sigma N^{0,75}$) отвечает асимптотике: $f(\omega) \sim \omega^{-2}$ при $\omega \to 0$. А. М. Яглом

**1 В206. Логарифмически нормальное распределение и его применение при изучении атмосферных явлений.** Foldés Georges. The lognormal distribution and its applications to atmospherics studies. Statist. methods ra-

dio wave propag. London — Oxford — New York — Paris, 1960, 227—232 (англ.)

Автор показывает, что атмосферный шум можно рассматривать как произведение большого числа электрических импульсов, частично перекрывающих друг друга. Рассматриваются вопросы распределения атмосферных шумов при наличии нескольких грозовых центров. В этом случае задача сводится к композиции нескольких распределений; анализируются условия, при которых результирующее распределение будет логарифмически нормальным (л. н.). В общем случае при нескольких грозовых центрах распределение отличается от л. н. Практическое применение полученных результатов состоит в том, что если распределение атмосферных шумов существенно отличается от л. н., то можно сделать вывод о наличии нескольких грозовых центров. Выводы автора основаны на замечании Форте, что л. н. величина может быть представлена как произведение большого числа независимых величин. Библ. 5 назв. Л. Д. Фельдман

**1 В207. Замечание относительно избыточности изображений.** Lowenschuss O. A comment on pattern redundancy. «IRE Trans. Inform. Theory», 1958, **4**, № 3, 127 (англ.)

Настоящая работа написана в связи со статьей Глоговацкого (РЖМат, 1958, 3155), посвященной определению и уменьшению избыточности в двухцветном изображении. В работе указывается некоторый частный метод решения того, какое изображение из их конечного множества было передано. Б. С. Цыбаков

**1 В208. О максимальных недостоверностях при измерениях в статистике.** Engvall Albert. Sur les incertitudes maxima de mesures en statistique. «Bull. sci. math.», 1959, **83**, № 4, 112—122 (франц.)

Обсуждается вопрос определения вероятности расположения каждой частицы в системе из $N$ частиц. Э. Г. Рузайкин

**1 В209. Нахождение оптимального дорожного тарифа.** Kondo Jiro, Koyanagi Yoshio. Decision of an optimum toll rate. «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1957, **1**, № 1, 18—24 (англ.)

Каждый пассажир, пользующийся транспортом, извлекает «выгоду» из поездки в одном направлении, выразимую в денежных единицах. Пусть эта «выгода» пассажира есть $b$. Считаем $b$ случайной величиной с функцией распределения $F(b)$. Обозначим: $n$ — число поездок пассажира в одном направлении за фиксированный интервал времени; $\lambda$ — среднее значение $n$, которое изменяется от пассажира к пассажиру и является случайной величиной с функцией распределения $H(\lambda)$; $x$ — стоимость проезда в одном направлении. Если $b>x$, то пассажир уплачивает стоимость проезда, в противном случае он отказывается от услуг транспорта. Предполагая, что $\lambda=cb$, авторы находят $x$, максимизирующее средний доход транспортной компании

$$E(Д \mid x) = x\int_{b>x} \lambda H(d\lambda)$$

при трех гипотезах о $H(\lambda)$. Л. Н. Куцев

**1 В210. Статистический анализ закономерностей явлений во времени в пространстве.** Elandt Regina. Statystyczne badanie prawidłowości zjawisk w czasie i przestrzeni. «Roczn. nauk roln.», 1958, **A79**, № 1, 401—424 (польск.; рез. русск., англ.)

Обзорная статья, посвященная оценке коэффициентов и проверке гипотез в многомерной и криволинейной регрессии, проиллюстрированная примером из сельского хозяйства. S. Zubrzycki

**1 В211. Нижняя граница для критической вероятности в конечном процессе фильтрации.** Harris T. E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 1, 13—20 (англ.)

Изучается один из процессов фильтрации — так называемый случайный лабиринт. Случайным лабиринтом называется такая решетка $L$ в прямоугольной системе координат на плоскости, у которой: 1) все точки вида $(x, y)$, где $x$ или $y$ — целые числа (точки, у которых $x$ и $y$ — целые, называются вершинами $L$), 2) каждому звену — единичному отрезку (с концами) из $L$, соединяющему две вершины, приписывается свойство быть либо активным с вероятностью $p$, либо пассивным с вероятностью $1-p$. Множество звеньев решетки $L$ называется связным, если все точки звеньев (включая концы) образуют связное множество точек в плоскости. Пусть $R(p)$ — вероятность отдельной вершины $L$ оказаться в связном бесконечном множестве активных звеньев. Очевидно, что $R(p)$ — неубывающая функция. Тогда $p_d$ называется критической вероятностью, если $p_d = \sup\{p : R(p) = 0\}$. Из общей теории процессов фильтрации для $p_d$ были получены следующие границы: $0{,}35 \leqslant p_d \leqslant 0{,}65$. В заметке для случайного лабиринта показывается, что $R\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, т. е. $p_d \geqslant \frac{1}{2}$.

С. В. Ефремов

**1 В212. Статистическая макролингвистика.** Mandelbrot B. Statistical macro-linguistics. «Nuovo cimento», 1959, **13**, Suppl. № 2, 518—520 (англ.)

Показано, что представление о слове как последовательности независимых равновероятных букв и пробела хорошо согласуется с эмпирическим распределением частот слоев $p(r)=Pr^{-B}$, где $p$ — частота данного слова, $r$ — число слов, не менее вероятных, чем данное, а $P$ и $B$ — некоторые константы. М. З. Розенфельд

**1 В213. Статистический анализ трехбуквенных сочетаний русского текста.** Лебедев Д. С., Гармаш В. А. В сб.: «Пробл. передачи информации». Вып. 2. М., АН СССР, 1959, 78—80

С помощью счетно-аналитических машин были подсчитаны относительные частоты всевозможных однобуквенных, двухбуквенных и трехбуквенных сочетаний в отрывке из романа «Война и мир» Толстого, содержащего 30 000 букв. Приведены значения относительных частот 26 наиболее вероятных трехбуквенных сочетаний. По полученным данным подсчитаны значения энтропий первых трех порядков для русского языка; эти значения сопоставлены с аналогичными данными для английского языка, имеющимися в известной статье Шеннона (Shannon C., Bell System Techn. J., 1951, **30**, № 1). А. М. Яглом

**1 В214. Марковская модель для дискриминационного обучения.** Atkinson Richard C. A Markov model for discrimination learning. «Psychometrica», 1958, **23**, № 4, 309—322 (англ.)

Рассматривается теория дискриминационного обучения, которая включает концепцию наблюденного ответа. Детально рассматривается вопрос, когда в распоряжении объекта имеется два стимула и два ответа. Двухответная проблема взята для простоты. Но полученные формулировки можно продолжить на $n$-ответные схемы. Рассматриваются два стимула $T_1$ и $T_2$ с вероятностями $\beta$, $1-\beta$ соответственно и имеющиеся в распоряжении два ответа $A_1$ и $A_2$. Следуя $T_1$, ответ $A_1$ правилен с вероятностью $\pi_1$, ответ $A_2$ правилен с вероятностью $1-\pi_1$. Следуя $T_2$, ответ $A_1$ правилен с вероятностью $\pi_2$ и ответ $A_2$ с вероятностью $1-\pi_2$. Используя параметры $\beta$, $\pi_1$, $\pi_2$, можно получить матрицу $P$, описывающую процесс обучения. Введем матрицу-строку $U(n)=[u_1(n), u_2(n),..., u_{16}(n)]$, где $u_i(n)$ — вероятность нахождения в состоянии $i$ в начале $n$-го испытания. Тогда марковский процесс, описывающий процесс дискриминационного обучения в начале $n$-го испытания, будет $U(n)=U(0)P^n$. $P$-матрица переходных вероятностей на один шаг. В. И. Бабкин

**1 В215. Полиморфизм и генетическая дисперсия и ковариация.** Mode C. J., Robinson H. F. Pleiotropism and the genetic variance and covariance. «Biometrics», 1959, **15**, № 4, 518—537 (англ.)

Разложение генетической дисперсии на аддитивную, доминантную и эпистатическую компоненты (Kempthorne O., An Introduction to genetic statistics, New York, 1957) обобщается на генетическую ковариацию, когда ген может влиять на два признака (влияние гена на несколько признаков называется полиморфизмом). Вводятся генетический, генотипический и фенотипический коэффициенты корреляции. При определенной схеме эксперимента даны оценки этих коэффициентов и приближенный способ вычисления дисперсий оценок. Теория иллюстрирована материалами по скрещиванию зерновых. О. М. Калинин

**1 В216. Подход к анализу биологических данных в случае полуквантованного ответа.** Ashford J. R. An approach to the analysis of data for semi-quantal responses in biological assay. «Biometrics», 1959, **15**, № 4, 573—581 (англ.)

Индивидуумы некоторой популяции подвергаются действию разных доз некоторого фактора. Предполагается, что доза $x$ вызывает ответ, распределенный нормально со средним $g(x)$ и дисперсией $\sigma^2$, где $g(x)$ — монотонная возрастающая функция. Экспериментатор часто не измеряет ответ точно, а фиксирует только принадлежность заданному интервалу из множества интервалов, на которые квантуются ответы. Если множество ответов разбить на два интервала точкой $y_1$, то легко находится доза $x_1$, дающая вероятностям попадания в эти интервалы заданные значения. Эта зависимость обобщается на случай, когда дозы и ответы измеряются с ошибкой (вводятся новые предположения). Предполагая множество ответов разбитым на $\kappa$ интервалов, автор выписывает уравнения максимального правдоподобия и выражения для асимптотических ковариаций оцениваемых параметров. Далее подробно изучаются данные о засорении легких у шахтеров. Доза измеряется логарифмом времени работы в угольной промышленности, а ответом является рентгеновский снимок, который с некоторой ошибкой относят к одной из трех групп. О. М. Калинин

**1 В217. Соотношение между степенью дисперсности в твиновых культурах микобактерий туберкулеза и колебаниями числа бактерий в дозах для инъекций.** Bentzon Michael Weis, Mackeprang Bent. The relationship of the degree of dispersion in tween cultures of mycobacterium tuberculosis to the variability in the numbers of bacteria in injection samples. «Acta pathol. et microbiol. scand.», 1960, **48**, № 1, 73—79 (англ.)

Распределение числа бактерий в единице объема описывается с помощью видоизмененного распределения Пойа

$$p\{n\} = \binom{\lambda + n - 1}{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^{\lambda} \left(\frac{\beta}{\lambda+\beta}\right)^{n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda$ и $\beta$ — параметры. Пусть $\nu$ — среднее число бактерий на единицу объема, $B$ — среднее число бактерий в выборочной дозе. Объем выборочной дозы $k$ считается случайной величиной со средним $B/\nu = \chi$ и дисперсией $\sigma^2\{k\} = \chi + 0{,}0075\chi^2$. Выводятся формулы для среднего и дисперсии числа бактерий в выборочном объеме. Для дисперсии вычисляются таблицы с двумя входами: среднее число бактерий на выборочный объем и среднее число бактерий в единице объема. В суспензиях, подвергнутых действию ультразвука (сильно дисперсных), колебание числа бактерий в выборочном объеме уменьшается, что и сказывается при введении этих суспензий мышам. О. М. Калинин

**1 В218. Единая теория количественного ответа на смесь ядов: случай без взаимодействия.** Hewlett P. S., Plackett R. L. A unified theory for quantal responses to mixtures of drugs. Non-interactive action. «Biometrics», 1959, **15**, № 4, 591—610 (англ.)

При действии дозы $z$ яда на организм действие оказывает лишь доля яда $\omega = \mu z^{\eta}$, где для данной популяции $\eta$ предполагается константой, а $\mu$ — случайной величиной. Порог действия яда определяется константой $\check{\omega}$, индивидуум реагирует на яд, если $\omega > \check{\omega}$. Физиологический эффект действия яда измеряется величиной $\delta = \omega/\check{\omega}$. Пусть $q$ обозначает долю организмов, не ответивших на яд, а значки 1 и 2 относятся к двум ядам. Предлагаются следующие два уравнения для действия смеси ядов, каждое из которых содержит в себе, как крайние случаи, уравнения для независимого действия ядов и для сходного действия; $q = P\{\nu\delta_1 + \delta_2 \leqslant 1, \delta_1 + \nu\delta_2 \leqslant 1\}$, $q = P\{\delta_1^{1/\lambda} + \delta_2^{1/\lambda} \leqslant 1\}$. Параметры $\nu$ и $\lambda$ измеряют степень сходства действия двух ядов. Далее вводится предположение, что логарифмы пороговой дозы распределены нормально с коэффициентом корреляции $\rho$. Для вычисления кривых ответа на действие двух ядов требуется электронная машина, но некоторые частные случаи вычисляются на настольных машинах. Приведены примеры кривых. О. М. Калинин

**1 В219. Методы теории временных рядов в биометрии.** Schneider B. Methoden der Zeitreihentheorie in der Biometrie. «Biometr. Z.», 1959, **1**, № 3, 162—189 (нем.)

Следуя в основном работе Хальда (Hald A., The decomposition of a series of observations, Gads Forlag, Copenhagen, 1948), автор рассматривает методику обработки данных полевых и других биологических испытаний. При этом изучаемый ряд предполагается состоящим из неслучайных компонент — уровня (тренда) и периодически изменяющейся составляющей, а также чисто случайной несвязной компоненты. Методика обработки иллюстрируется на примере. Н. В. Смирнов

**1 В220. Неравенства для крайних значений и других порядковых характеристик в применении к задачам биометрии.** Ludwig O. Ungleichungen für Extremwerte und andere Ranggrössen in Anwendung auf biometrische Probleme. «Biometr. Z.», 1959, **1**, № 3, 203—209 (нем.)

Для математических ожиданий членов вариационного ряда $x_1(n) \leqslant x_2(n) \leqslant \ldots \leqslant x_n(n)$ величины $X$, полученного из выборки объема $n$ из генеральной совокупности со средним $\mu = E(X)$ и дисперсией $\sigma^2 = D(X)$, указываются неравенства

$$\frac{\mu - E(x_m(n))}{\sigma} \leqslant A_{mn} = \sqrt{\frac{n\binom{2n-2m}{n-m}\binom{2m-2}{m-1}}{\binom{2n-1}{n-1}} - 1}.$$

Далее имеет место неравенство

$$E(x_j(n) - x_i(n) \leqslant \sigma B_{n;i;j},$$

где

$$B_{n;i;j} = \sqrt{S},$$

$$S = \frac{2n}{\binom{2n}{n}} \cdot \left[\binom{2j-2}{j-1}\cdot\binom{2n-2j}{n-j} + \binom{2i-2}{i-1}\cdot\binom{2n-2i}{n-i} - 2\binom{i+j-2}{i-1}\cdot\binom{2n-i-j}{n-j}\right],$$

$$1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Значения $A_{mn}$ и $B_{n;i;j}$ табулируются при малых $n$. Рассмотрены некоторые приложения этих неравенств к

задачам экспериментальной медицины и биометрии.
Н. В. Смирнов

**1 В221. Оценивание предметных индексов с помощью номограмм.** Colver Robert M. Estimating item indices by nomographs. «Psychometrika», 1959, **24**, № 2, 179—185 (англ.)

Приведены номограммы для вычисления индексов трудности и различающей силы теста (определения см. Davis F. B., Item-analisys data: their computation, interpretation and use in test construction. Cambridge, Harvard Univ. Press, 1949) по процентному содержанию правильных ответов в наиболее сильной и слабой группах.
С. С. Кислицын

**1 В222. Применение в орнитологии метода выборок «по координатной сетке».** Masuyama Motosaburo. An ornithological application of line grid sampling. «Repts» Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1957, **5**, № 1, 1—3 (англ.)

Работа основана на модификации формулы Пуанкаре в интегральной геометрии и связана с другими работами автора по тому же вопросу. На участке конечной площади $T$ случайно расположены окружности радиуса $R$. Определяется математическое ожидание и дисперсия числа пересечений заданной фиксированной кривой $K_0$ длины $L_0(t)$ с этими окружностями. Работа может найти применение в орнитологии и ихтиологии при оценке плотности распределения организмов на площади $T$ по числу встреч с ними на данном пути. М. А. Куликов

**1 В223. Соответствие отрицательного биномиального распределения с некоторыми данными об асинаптическом поведении хромосом.** Jain S. K. Fitting the negative binomial distribution to some data on asynaptic behaviour of chromosomes. «Genetica», 1959, **30**, № 1-2, 108—122 (англ.)

Автор обсуждает вопрос о возможности использования отрицательного биномиального распределения при рассмотрении хромосомного спаривания в метафазе в некоторых растениях, каждое из которых показывает асинаптическое поведение. В. И. Бабкин

**1 В224. Случайное блуждание и электрические токи в сетях.** Nash-Williams C. St. J. A. Random walk and electric currents in networks. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1959, **55**, № 2, 181—194 (англ.)

Рассматривается локально конечный связный граф $G$. Пусть $\xi_k$ ($k = 0, 1, \ldots$) — его вершины. Для каждого $\xi_k$ на его ветвях определена функция $c$; $D(\xi_k)$ — сумма значений функции $c$ по всем ветвям, исходящим из $\xi_k$. Частица, начиная от вершины $\xi_0$, совершает случайное блуждание $\xi_0, \lambda_1, \xi_1, \lambda_2, \ldots$, где $\lambda_j$ — ветвь, соединяющая $\xi_{j-1}$ с $\xi_j$ ($j = 1, 2, \ldots$), и, если $\lambda$ является ветвью, исходящей из $\xi_j$, тогда $P\{\lambda_{j+1} = \lambda\} = c(\lambda)[D(\xi_j)]^{-1}$, ($j = 1, 2, \ldots$). Пусть $v$ — множество вершин из $G$ такое, что дополнение его конечно и содержит $\xi_0$, а $\tau$ — вероятность того, что частица побывает в $v$, не возвращаясь прежде в $\xi_0$. В терминах геометрической характеристики $\tau$ дается необходимое и достаточное условие, чтобы сеть была рекуррентной. Рассмотренная схема соответствует электрической сети $G$ с проводимостью $c(\lambda)$ ветви $\lambda$. По резюме автора

**1 В225. Вывод большого канонического распределения для классических систем.** Candlin D. J. Derivation of the classical grand canonical distribution. «Nuovo cimento», 1960, **15**, № 5, 856—858 (англ.)

Предложенная А. И. Хинчиным процедура получения канонического распределения Гиббса из микроканонического используется для вывода большого канонического распределения для классической системы, макроскопическое состояние которой задается температурой, объемом и химическим потенциалом (в каноническом распределении — полным числом частиц). И. А. Квасников

**1 В226. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов.** Валландер С. В. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 1, 58—60

Автор вводит в рассмотрение следующие величины: плотность частиц в окрестности данной точки фазового пространства, среднее число частиц, появляющихся в секунду в этой окрестности в результате их столкновений друг с другом и с движущейся поверхностью, обтекаемой газом, вероятность частиц в течение определенного времени пролететь без столкновений, а также функции, характеризующие вероятность появления частицы с определенной скоростью в результате столкновения заданных частиц друг с другом или с обтекаемой поверхностью (эти функции, как и сечение рассеяния, считаются известными из физических соображений). Для этих величин составляются интегральные соотношения. Исключив из них все неизвестные величины, кроме первой, можно получить для нее интегральное уравнение, которое при действии на него дифференциального оператора приобретает форму уравнения Больцмана.
И. А. Квасников

**1 В227. Определение энтропии для неравновесных состояний.** Kampen N. G. van. The definition of entropy in nonequilibrium states. «Physica», 1959, **25**, № 12, 1294—1302 (англ.)

Рассмотрены три различных определения энтропии для статистической системы: определения Больцмана, Фирца и Гиббса. Показано, что как для случая равновесия, так и для состояний, близких к нему, главные асимптотические порядки этих выражений в статистическом предельном переходе $N \to \infty$, $E/N$-const ($N$ — число частиц, $E$ — энергия системы) совпадают. Автор предлагает свое определение энтропии, близкое по смыслу определению Гиббса, которое для состояния равновесия приводит к выражению энтропии по Больцману.
И. А. Квасников

**1 В228. Несколько замечаний о системах страховых премий в автомобильном страховании.** Grenander Ulf. Some remarks on bonus systems in automobile insurance. «Skand. aktuarietidskr.», 1957 (1958), № 3-4, 180—197 (англ.)

Анализируются различные сложные системы страховых премий в автомобильном страховании в Швеции с точки зрения достижения приближенного равенства между средней премией и средним расходом по страхованию и обеспечения умеренной дисперсии расходов. Специфической чертой рассматриваемых систем является увеличение страховой премии в том случае, если со стороны страхователя имелись претензии в предшествующем году. Это обстоятельство создает условия для применения в данном вопросе методов теории игр, поскольку страхователь может пренебречь небольшой претензией в данном году, чтобы не увеличивать размера своих платежей в будущем. А. А. Конюс

**1 В229. Некоторые положения теории сигналов.** Lange F. H. Aussagen der Signaltheorie. «Nachrichtentechnik», 1959, **9**, № 8, 379—381 (нем.)

**1 В230. О зависимости между средней и наименьшей прочностями и их применение при изготовлении бетона.** Arneth W. Über Zusammenhänge zwischen mittlerer Festigkeit und Mindestfestigkeit und deren Anwendung auf den Werkstoff Beton. «Strasse und Autobahn», 1959, **10**, № 9, 355—359 (нем.)

**1 В231. Некоторые статистические методы определения масштабных точек.** Хаяси (Hayshi Chikio), «Токэй сури кэнкюсё ихо», «Proc. Inst. Statist. Math.», 1958, **6**, № 1, 88—93 (японск.; рез. англ.)

**1 В232. Теоретико-вероятностный метод определения нагрузочных диаграмм угледобывающих машин.** Кухтенко А. И. В сб.: «Прочность и износ горн. оборуд.», М., Госгортехиздат, 1959, 117—126

**1 В233. Некоторые результаты для очередей с пуассоновым потоком клиентов.** Prabhu N. U. Some results for the queue with Poisson arrivals. «Proc. 46 th Indian Sci. Congr. Assoc., Dehli», 1959. Part 4. Calcutta, s. a., 5 (англ.)

**1 В234. Энтропия итальянского языка и ее подсчет.**

Manfrino Renato. L'entropia della lingua italiana ed il suo calcolo. «Alta frequenza», 1960, **29**, № 1, 4—29 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

**1 В235. О некоторых задачах применения теории случайных функций в метрологии.** Simkin G. S. O niektórych zagadnieniach zastosowania funkcji losowych w metrologii. «Pomiary, automat., kontrola», 1960, **6**, № 3, 103—104 (польск.)

**1 В236. Корреляционный метод исследования больших неоднородностей ионосферы.** Гусев В. Д. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 6, 87—98

**1 В237. Формула регрессии и совместное распределение структурных факторов.** Vaughan Philip A. Regression formulae and the joint distribution of structure factors. «Acta crystallogr.», 1959, **12**, № 12, 981—987 (англ.)

**1 В238. О некоторых вопросах теоретико-вероятностного анализа статических погрешностей измерительных систем.** Чехонадский Н. А. «Тр. Ин-та машиновед. АН СССР. Семинар по точности в машиностр. и приборостр.», 1959, вып. 13, 3—14

**1 В239. Логическая структура диагноза, основанная на вероятности.** Rush Stanley. A logical structure for diagnosis based on probability. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 9, 10—12 (англ.)

**1 В240. Планы экспериментов в промышленности.** Hamaker H. C. Experimental designs in industry. «Statistica, Neerlandica», 1955, **9**, 209—232 (гол.; рез. англ.)

**1 В241. Одна задача генетики, решенная с помощью теории вероятностей.** Dagnelie Pierre. Un problème de génétique résolu par le calcul des probabilités. «Bull. Inst. agron. et stat. rech. Gembloux», 1958, **26**, № 4, 322—325 (франц.)

**1 В242 К. Вероятностные и статистические методы для инженеров. Первый курс.** Derman Cyrus, Klein Morton. Probability and statistical inference for engineers: a first course. New York — London, Oxford Univ. Press, 1959, xii, 144 pp., ill., 30 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 531, 10 (англ.)

**1 В243 К. Методы наглядного преподавания математической статистики. Т. 2.** Lorenz Paul. Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik. Bd 2. Der Schluß vom Teil aufs Ganze. Teil 1. Leipzig, Hirzel, 1959, XI, 213 S., ill., 18.60 DM. «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1959, **A**, № 29, 2236 (нем.)

---

См. также: 1А1, 1А3, 1А4, 1А25, 1А35, 1А116, 1А199, 1А265, 1Б10, 1Б368, 1Б394, 1В258, 1В285.

## ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

**1 В244. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности.** Тихонов А. Н., Самарский А. А. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 3, 514—517

Работа посвящена построению точной разностной схемы и схем любого порядка точности для краевых задач 1-го, 2-го и 3-го рода для уравнения

$$L^{(p,q,f)}\ u=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right]-q(x)u+f(x)=0\ \ (0<x<1). \quad (1)$$

Рассматриваются однородные трехточечные консервативные схемы вида

$$L_h^{(p,q,f)}y_i=\frac{1}{h^2}\left(\Delta\frac{\nabla y_i}{A_i^h}\right)-D_i^h y+\Phi_i^h\ , \quad (2)$$

где употребляются обозначения

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ \nabla y_i=y_i-y_{i-1}\left(h=\frac{1}{N},\ x_i=ih,\ y_i=y(x_i)\right),$$

$$A_i^h=A^h[p(x_i+sh),\ q(x_i+sh)]\ \ (-1<s<0),$$

$$D_i^h=D^h[p(x_i+sh),\ q(x_i+sh)]\ \ (-1<s<1),$$

$$\Phi_i^h=\Phi^h[p(x_i+sh),\ q(x_i+sh)]\ \ (-1<s<1);$$

$A^h\ [\bar{p}(s),\ \bar{q}(s)]$, $D^h[\bar{p}(s),\ \bar{q}(s)]$, $\Phi^h[\bar{p}(s),\ \bar{q}(s),\ ]$ — нелинейные функционалы, вычисляемые для схем конечного порядка точности при помощи квадратур. (Схема называется однородной и консервативной, если ее можно написать в виде (2)). Точная схема имеет вид

$$u_i=P_i^h u_{i-1}+Q_i^h u_{i+1}+R_i^h\ ,$$

где $P_i^h$, $Q_i^h$, $R_i^h$ выражаются по явным, простым формулам через шаблонные функции $\alpha(s,h)$, $\beta(s,h)$, $\gamma(s,h)$, являющиеся решениями задач Коши ($\alpha$ и $\beta$) и краевой задачи ($\gamma$) для линейного уравнения специального вида. Шаблонные функции $\alpha(s,h)$, $\beta(s,h)$, $\gamma(s,h)$ являются целыми функциями $h^2$ и могут быть разложены в ряды $\alpha(s,h)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\alpha^{(2k)}(s)$ и т. д., где коэффициенты $\alpha^{(2k)}$ и $\beta^{(2k)}$ могут быть просто вычислены через квадратуры от $\bar{p}(s)$, а коэффициенты $\gamma^{(2k)}$ — через квадратуры от $\bar{p}(s)$ и $\bar{f}(s)$. Имеет место следующая теорема: Если взять усеченную схему $2m$-го ранга (т. е. схему, где вместо функций $\alpha, \beta, \gamma$ взяты первые $m$ членов соответствующих рядов), то имеет место $(2m+2)$-й интегральный порядок точности, если коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ уравнения (1) кусочно-непрерывны и $0<R_1\leqslant p(x)\leqslant R_2$; $0\leqslant q(x)\leqslant R_2$; $|f(x)|\leqslant R_2$. Теорема имеет место для краевых задач всех трех родов, если сформулировать соответствующим образом понятие усеченного краевого условия $2m$-го ранга.

А. Л. Крылов

**1 В245. О канонических однородных разностных схемах.** Тихонов А. Н., Самарский А. А. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 4, 761—764

Рассматриваются однородные трехточечные разностные схемы для решения краевых задач

$$Lu^{(k,q,f)}=\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u+f(x)=0;\ 0<x<1\ ,$$

$$u(0)=\mu_1,\ u(1)=\mu_2.$$

Изучаются схемы вида $L_h^{(k,q,f)}y_i=L_h^k y_i-D_i^{(h,q)}y_i+F_i^{(h,f)}$, $L_h^k y_i=\frac{1}{h^2}[B_i^{(h,k)}(y_{i+1}-y_i)-A_i^{(h,k)}(y_i-y_{i-1})]$.

Схема называется однородной, если коэффициенты ее имеют вид $A_i^{(h,k)}=A^h[\bar{k}_i(s)]$, $B_i^{(h,k)}=B^h[\bar{k}_i(s)]$, $\bar{k}_i(s)=k(x_i+sh)$, $-1<s<1$, $D_i^{(h,q)}=D^h[q(x_i+sh)]$, $F_i^{(h,f)}=F^h[f(x_i+sh)]$, где $A^h$, $B^h$, $D^h$, $F^h$ — нелинейные функционалы, параметрически зависящие от $h$. Семейство разностных схем определяется заданием класса функционалов, при помощи которых вычисляются коэффициенты схемы. Рассматривается класс функ-

ционалов $A^h[\psi]$ со следующими свойствами: 1) $A^h[\psi]$ имеет дифференциал 3-го порядка по $h$, так что

$$A^h[\psi]=A^{(0)}[\psi]+hA^{(1)}[\psi]+h^2A^{(2)}[\psi]+$$
$$+h^3A^{(3)}[\psi]+h^3\rho(h),$$

где $\rho(h)\to 0$ при $h\to 0$, а $A^{(m)}[\psi]$ имеет дифференциал порядка $3-m$. 2) $A^h[\psi]$ и все $A^{(m)}[\psi]$ являются однородными функционалами 1-ой степени: $A^h[c\psi]=cA^h[\psi]$, причем $A^h[1]=1$. 3) $A^h[\psi]$ и все $A^{(m)}[\psi]$ являются монотонно неубывающими, т. е. $A^h[\psi_2]\geqslant A^h[\psi_1]$, если $\psi_2\geqslant\psi_1$. Если $A^h[\psi]$ не зависит от $h$, то он называется каноническим и обозначается $A[\psi]$. Схема $L_h^{k,q,f}$ называется канонической, если коэффициенты ее суть канонические функционалы. Доказывается, в частности, следующая теорема: Любая каноническая симметричная консервативная схема имеет 2-й порядок точности в $C_{m_k m_q m_f}$ для $m_k\geqslant 3$; $m_q, m_f\geqslant 2$. Изучается асимптотика погрешности аппроксимации по $h$ при $h\to 0$, которая применяется для построения схем повышенной точности. Указывается, как построить аппроксимацию для граничного условия третьего рода.

А. Л. Крылов

**1 В246. Методы интегрирования дифференциальных уравнений.** Schlesinger S. Integration methods for differential equations. «J. Astronaut. Sci.», 1959, **6**, № 4, 53—57 (англ.)

При численном интегрировании дифференциальных уравнений и систем типа $y''=f(x,y)$ для целей астронавтики предъявляются особо высокие требования как к точности, так и к скорости вычислений. Для подобных уравнений экспериментально испытывались методы Рунге-Кутта, Адамса и метод двойного суммирования (РЖМат, 1956, 1340). Метод Милна (там же, стр. 97) оказался «самым неудовлетворительным» и был исключен из дальнейших сопоставлений. В случае, если система устойчива (т. е. погрешность, допущенная на некотором шаге, при распространении быстро убывает), лучше других оказался метод суммирования (попытка распространить его на другие случаи путем введения поправок высших порядков не удалась). При сомнительной устойчивости и «умеренной» неустойчивости лучшим оказался метод Адамса с пересчетом, с использованием разностей до высокого (7-го) порядка, но при «резкой» неустойчивости следует брать в этом методе меньше членов (до $\Delta^4$). Метод Адамса без пересчета рекомендуется лишь в случае, когда нужно экономить ячейки памяти за счет программы. Метод Рунге-Кутта при одинаковой затрате времени дает гораздо большую, чем метод Адамса, погрешность метода, но заведомо ведет себя хорошо в отношении распространения погрешности, имеет ряд других (хорошо известных) достоинств и рекомендуется для «ориентировочных» расчетов, когда не нужна максимальная точность. Каждый метод имеет свою сферу применения; необходима разработка новых методов, особенно для интегрирования систем неустойчивого типа с колеблющимися решениями.

М. Л. Бродский

**1 В247. $h^2$-экстраполяция в задачах о собственных значениях.** Osborne M. R. $h^2$-extrapolation in eigenvalue problems. «Quart. J. Mech. and Appl. Math.», 1960, 13, № 2, 156—168 (англ.)

Задача о собственных значениях для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(\lambda-q(x))\varphi=0,\quad A_0\varphi(0)+B_0\frac{d\varphi(0)}{dx}=0,$$

$$A_1\varphi(1)+B_1\frac{d\varphi(1)}{dx}=0$$

решается методом конечных разностей при помощи обычной («центральной») аппроксимации

$$\varphi_{i-1}^{(h)}-2\varphi_i^{(h)}+\varphi_{i+1}^{(h)}+h^2(\lambda^{(h)}-q_i)\varphi_i^{(h)}=0,$$

$$A_0\varphi^{(h)}+\frac{B_0}{2h}(\varphi_1^{(h)}-\varphi_{-1}^{(h)})=0,\quad A_1\varphi_n^{(h)}+\frac{B_1}{2h}(\varphi_{n+1}^{(h)}-\varphi_{n-1}^{(h)}).$$

При предположении, что $q(x)$ является регулярной функцией с ненулевым радиусом сходимости в интервале (0, 1), автор доказывает сходимость рядов

$$\lambda^{(h)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\frac{d^m\lambda}{dh^m},\qquad(1)$$

$$\varphi_j^{(h)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\left\{\sum_{r+s=m}(j-i)^s\frac{m!}{s!r!}\frac{\partial^m\varphi_i}{\partial x^s\partial h^s}\right\},\qquad(2)$$

в которых коэффициенты при нечетных степенях $h$ равны 0. Разложение (1) (соответственно (2)) позволяет для улучшения точности $\lambda^{(h)}$ (соответственно $\varphi^{(h)}$) применять так называемую $h^2$-экстраполяцию. Например, отбрасывая в (1) члены с $m>2$, имеем $\lambda^{(h)}=\lambda+h^2/2\,d^2\lambda/dh^2$, откуда следует, что величина $\lambda^{(h)}-h^2/2\,d^2\lambda/dh^2$ имеет погрешность $O(h^4)$. При этом для $d^2\lambda/dh^2$ автор дает следующее выражение

$$\frac{d^2\lambda}{dh^2}=\frac{\left\{\frac{1}{3}\frac{d^3\varphi(1)}{dx^3}\varphi(1)-\frac{1}{3}\frac{d^3\varphi(0)}{dx^3}-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{d^4\varphi}{dx^4}\varphi\right\}dx}{\int_0^1\varphi^2dx},$$

правую часть которого можно считать (с точностью до членов $O(h^2)$) известной. Рассматривается связь между методом $h^2$-экстраполяции и методом разностных поправок Фокса — Волкова. Автор отмечает, что исследованный им метод $h^2$-экстраполяции не всегда удобен при практических вычислениях, и предлагает видоизменение метода разностных поправок.

В. К. Саульев

**1 В248. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии.** Булеев Н. И. «Матем. сб.», 1960, **51**, № 2, 227—238

Система эллиптических сеточных уравнений

$$-a_{i,k}v_{i-1,k}-c_{i,k}v_{i+1,k}-b_{i,k}v_{i,k-1}-d_{i,k}v_{i,k+1}+$$
$$+p_{i,k}v_{i,k}=f_{i,k},$$

где $a_{i,k}+b_{i,k}+c_{i,k}+d_{i,k}\leqslant p_{i,k}$, соответствующая краевой задаче для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial V}{\partial y}-CV+F=0,$$

представляется в «факторизованном» виде

$$z_{i,k}=\alpha_{i,k}z_{i-1,k}+\beta_{i,k}z_{i,k-1}+\varphi_{i,k}+\gamma_{i,k}f_{i,k},$$
$$v_{i,k}=\zeta_{i,k}v_{i+1,k}+\delta_{i,k}v_{i,k+1}+z_{i,k},\qquad(1)$$

где

$$\varphi_{i,k}=\mu_{i,k}v_{i-1,k+1}+\nu_{i,k}v_{i+1,k-1}-\theta_{i,k}(\mu+\nu)_{i,k}v_{i,k},$$
$$\mu_{i,k}=\alpha_{i,k}\delta_{i-1,k},\ \nu_{i,k}=\beta_{i,k}\zeta_{i,k-1},\ \alpha_{i,k}=a_{i,k}\gamma_{i,k},$$
$$\beta_{i,k}=b_{i,k}\gamma_{i,k},\ \zeta_{i,k}=c_{i,k}\gamma_{i,k},\ \delta_{i,k}=d_{i,k}\gamma_{i,k},$$
$$\gamma_{i,k}=[p_{i,k}-a_{i,k}(c_{i-1,k}+\theta_{i,k}d_{i-1,k})\gamma_{i-1,k}-$$
$$-b_{i,k}(d_{i,k-1}+\theta_{i,k}c_{i,k-1})\gamma_{i,k-1}]^{-1}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 1),$$

после чего последняя решается методом итераций. Как отмечает автор, весьма эффективным и легко поддающимся теоретическому исследованию является подправление полученных таким путем итераций (при $\theta_{i,k}\approx 0{,}5$) при помощи обычной формулы Ричардсона

$$v'_{i,k} = \frac{1}{p_{i,k}\gamma_{i,k}}(\alpha_{i,k}v_{i-1,k} + \beta_{i,k}v_{i,k-1} + \\ + \zeta_{i,k}v_{i+1,k} + \delta_{i,k}v_{i,k+1} + \gamma_{i,k}f_{i,k}). \quad (2)$$

«В этом случае одна итерация равносильна десяти — двенадцати итерациям» типа (2). Выводятся достаточные признаки сходимости итераций и показывается, каким образом нужно выбирать оптимальное, т. е. обеспечивающее наиболее быструю сходимость, значение параметра $\theta_{i,k}$. Один из достаточных признаков сходимости заключается в выполнении неравенств

$$\beta_{i,k}\mu_{i,k-1} - \alpha_{i,k}\theta_{i-1,k}(\mu+\nu)_{i-1,k} \geqslant 0,$$
$$\alpha_{i,k}\nu_{i-1,k} - \beta_{i,k}\theta_{i,k-1}(\mu+\nu)_{i,k-1} \geqslant 0,$$
$$\delta_{i,k}\nu_{i,k+1} - \zeta_{i,k}\theta_{i+1,k}(\mu+\nu)_{i+1,k} \geqslant 0,$$
$$\zeta_{i,k}\mu_{i+1,k} - \delta_{i,k}\theta_{i,k+1}(\mu+\nu)_{i,k+1} \geqslant 0.$$

Более экономной является схема, состоящая из попеременного использования двух систем вида (1): для получения первого приближения функции $v_{i,k}$ применяются формулы (1), а для второго — формулы

$$z'_{i,k} = \zeta'_{i,k}z'_{i+1,k} + \beta'_{i,k}z'_{i,k-1} + \varphi'_{i,k} + \gamma'_{i,k}f_{i,k}, \quad (3)$$
$$v_{i,k} = \alpha'_{i,k}v_{i-1,k} + \delta'_{i,k}v_{i,k+1} + z'_{i,k},$$

где

$$\gamma'_{i,k} = [p_{i,k} - c_{i,k}(a_{i+1,k} + \theta'_{i,k}d_{i+1,k})\gamma'_{i+1,k} - \\ - b_{i,k}(d_{i,k-1} + \theta'_{i,k}a_{i,k-1})\gamma'_{i,k-1}]^{-1},$$
$$\alpha'_{i,k} = a_{i,k}\gamma'_{i,k},\ \beta'_{i,k} = b_{i,k}\gamma'_{i,k},\ \zeta'_{i,k} = c_{i,k}\gamma'_{i,k},$$
$$\delta'_{i,k} = d_{i,k}\gamma'_{i,k},\ \varphi'_{i,k} = \zeta'_{i,k}\delta'_{i+1,k}(v_{i+1,k+1} - \theta'_{i,k}v_{i,k}) + \\ + \beta'_{i,k}\alpha'_{i,k-1}(v_{i-1,k-1} - \theta'_{i,k}v_{i,k}),$$

$0 \leqslant \theta'_{i,k} \leqslant 1$ и процесс повторяется.

«Опыт решения различных уравнений диффузии при заданных значениях искомой функции на границе области — отмечает автор — показывает, что итерационный процесс (1) и (3) сходится при любом значении $\theta_{i,k} = \theta'_{i,k} = \text{const}$ из интервала $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, причем быстрота сходимости улучшается с возрастанием $\theta$ от 0 до 1». Теоретически сходимость процесса (1), (3) не доказывается. В случае выполнения неравенств $\zeta_{i,k} + \delta_{i,k} < 1$, $\alpha_{i,k} + \beta_{i,k} < 1$ формулы типа (1) являются устойчивыми по отношению к ошибкам округления. Описанный метод обобщается на трехмерный случай.

В. К. Саульев

**1 В249. Численное решение уравнения Лапласа при начальных условиях Коши.** Sugai I. Numerical solution of Laplace's equation, given Cauchy conditions. «IBM J. Res. and Developm.», 1959, **3**, № 2, 187—188

Исследуется эмпирически рост единичной ошибки при решении заведомо некорректной задачи — уравнения Лапласа при начальных условиях Коши — разностным методом, при помощи квадратной сетки. Максимальная ошибка после $m$ «некорректных» шагов имеет порядок роста $(5,7)^m$.

М. Л. Бродский

**1 В250. Численное решение краевых задач.** Radok J. R. M., Merril R. F. Numerical solution of boundary value problems. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 5-6, 202—214 (англ.; рез. нем., русск.)

Параболическое уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

авторы представляют на сетке в виде уравнения

$$U(x, t+l) - \sum_{r=-\beta}^{+\beta} C_\beta^r(A, R)U(x+rh, t) = \quad (2)$$
$$= \sum_{j=0}^{p}\left\{\frac{R^j}{j!} - \sum_{r=-\beta}^{+\beta} C_\beta^r \frac{r^{2j}}{(2j)!}\right\} h^{2j-2}\left(\frac{\partial^{2j}U}{\partial x^{2j}}\right)_{x,t} + O(h^{2p}),$$

где

$$C_\beta^r(A, R) = \sum_{\mu=r}^{\beta}(-1)^{\mu+r}\binom{2\mu}{\mu+r}R^\mu\frac{1}{\mu!},\ R = \frac{l}{h^2}$$

($h$ и $l$ — шаги сетки в направлении осей соответственно $x$ и $t$). Отбрасывание правой части в (2) доставляет явное одношаговое сеточное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1). Выражение, стоящее в фигурной скобке уравнения (2), при $j=0$ и $j=1$ всегда равно 0. Поэтому погрешность аппроксимации уравнения (1), сеточным уравнением, получающимся из (2), равна $O(h^{2p})$, где $p \geqslant 1$. Если выполнено условие

$$\frac{R^j}{j!} - \sum_{r=-\beta}^{+\beta} C_\beta^r \frac{r^{2j}}{(2j)!} = 0,\ j = 0, 1, \ldots, \beta, \quad (3)$$

то погрешность аппроксимации имеет порядок $h^{2\beta}$. Авторы получают явные выражения

$$C_\beta^0 = \frac{1}{\|M\|}\sum_{i=0}^{\beta}\frac{(2i)!}{i!}M_{0i}R^i,$$
$$C_\beta^r = \frac{1}{2\|M\|}\sum_{i=1}^{\beta}\frac{(2i)!}{i!}M_{ri}R^i,\ r = 1, 2, \ldots, \beta,$$

для коэффициентов $C_\beta^r$, являющихся решением уравнений (3). Здесь

$$\|M\| = \prod_{j=2}^{\beta}(j^2-1)\prod_{j=3}^{\beta}(j^2-2^2)\ldots(\beta^2-(\beta-1))^2,$$

а $M_{j,i}$ — $(j, i)$-й минор квадратной матрицы $M$ типа Вандермонда. Исследуются осложнения, возникающие в граничных и приграничных узлах при использовании сеточных уравнений повышенной точности. В частности, для случая краевого условия вида $U + c\partial U/\partial x = 0$ при $x = a$ получается следующее сеточное уравнение

$$u(a+(i+1)h, t) = \frac{2h}{c}\sum_{j=0}^{2i}(-1)^{j+1}\binom{2i}{j}\times$$
$$\times u(a+(i-j)h, t) + \sum_{j-1}^{2i+2}(-1)^{j+1}\binom{2i+2}{j}\times$$
$$\times\left(\frac{i+1-j}{i+1}\right)u(a+(i+1-j)h, t),\ i = 0, 1, \ldots, \beta,\ c \neq 0.$$

На четырех числовых примерах проиллюстрирована эффективность сеточных уравнений повышенной точности ($\beta = 2, 3, 4, 5$), получающихся из (2). Приведена блок-схема программы.

В. К. Саульев

**1 В251. К численному решению задач с начальными условиями для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. I. Характеристическая начальная задача.** Törnig W. Zur numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen. I. Das charakteristische Anfangswertproblem. «Arch-Ration. Mech. and Analysis», 1960, **4**, № 5, 428—445 (нем.)

Решение характеристической начальной задачи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad (1)$$

$z(x, \eta) = \sigma(x)$, $z(\xi, y) = \tau(y)$, $\sigma(\xi) = \tau(\eta)$ (при предположении существования и единственности ее решения)

представляется в интегральной форме ($z_x = p$, $z_y = q$, $z_{xy} = s$)

$$z(x, y) = z(x, \eta) + z(\xi, y) - z(\xi, \eta) + \int_\xi^x \int_\eta^y f(u, v, z, p, q)\, dv\, du,\ p(x, y) = p(x, \eta) + \int_\eta^y f(x, v, z, p, q)\, dv,\ q(x, y) = q(\xi, v) + \int_\xi^x f(u, y, z, p, q)\, du. \quad (2)$$

Аппроксимируя в (2) на прямоугольной сетке с шагами $h$ и $k$ подынтегральную функцию $f$ при помощи полиномов, автор получает экстраполяционные и интерполяционные формулы любой точности для численного интегрирования уравнения (1). Например,

$$z_{r+1,s+1} = z_{r+1,s} + z_{r,s+1} - z_{r,s} + hk \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\mu \beta_\nu \nabla_x^\mu \nabla_y^\nu f_{r,s}, \quad (3)$$

$$p_{r+1,s+1} = p_{r+1,s} + k \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \nabla_y^\nu f_{r+1,s},$$

$$q_{r+1,s+1} = q_{r,s+1} + h \sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu \nabla_x^\mu f_{r,s+1},$$

где $\beta_\rho = \frac{1}{\rho!} \int_0^1 u(u+1)(u+2)\ldots(u+\rho-1)\,du$

и

$$z_{r+1,s+1} = z_{r+1,s} + z_{r,s+1} - z_{r,s} + hk \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\mu^* \beta_\nu^* \nabla_x^\mu \nabla_y^\nu f_{r+1,s+1},$$

$$p_{r+1,s+1} = p_{r+1,s} + k \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu^* \nabla_y^\nu f_{r+1,s+1}, \quad (4)$$

$$q_{r+1,s+1} = q_{r,s+1} + h \sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu^* \nabla_x^\mu f_{r+1,s+1},$$

где $\beta_\rho^* = \frac{1}{\rho!} \int_0^1 (u-1)u(u+1)\ldots(u+\rho-2)\,du$. Формула (3) является экстраполяционной, формула (4) — интерполяционной. Автор отмечает, что формулы интерполяционного типа обладают большей точностью, чем формулы экстраполяционного типа. Зато каждый шаг в интерполяционных формулах требует применения метода итераций. При этом в качестве начальных приближений рекомендуется брать результаты просчета по экстраполяционным формулам. Устанавливается критерий для сходимости итераций при пользовании интерполяционными формулами. Выводятся специальные формулы (интерполяционного типа) для просчета узлов, находящихся вблизи начальных характеристик, устанавливается сходимость их итерационного решения и оценивается погрешность вычисляемых начальных значений. Получены оценки погрешности аппроксимации уравнений (2) соответственно уравнениями (3) и (4). Формулы (3) и (4) приведены в безразностной форме. Рассматриваются также интерполяционные формулы, соответствующие центральным разностям. Вопрос о численной устойчивости совсем не рассматривается. Имеется один числовой пример. Работа пересекается с аналогичной работой Ярышевой (РЖМат, 1960, 3456).

В. К. Саульев

**1 В252. К численному решению задач с начальными условиями для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. II. Задача Коши.** Törnig W. Zur numerischen Behandlung von Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen. II. Das Cauchy-Problem. «Arch. Ration. Mechn. and Analysis», 1960, **4**, № 5, 446—466 (нем.)

Задача Коши (обозначения см. реф. 1В251) $s = f(x, y, z, p, q)$, $z(x, \varphi(x)) = \alpha(x)$, $p(x, \varphi(x)) = \beta(x)$, $q(x, \varphi(x)) = \gamma(x)$ (начальная кривая: $y = \varphi(x)$) при помощи замены координат $x = \xi$, $y = \varphi(\eta)$ сводится к задаче, которую в прежних обозначениях независимых переменных можно записать в виде

$$s = f(x, y, z, p, q), \quad (1)$$

$$z(x, x) = \alpha(x),\ p(x, x) = \beta(x),\ q(x, x) = \gamma(x). \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) записываются в интегральной форме

$$z(\xi, \eta) = z(\xi, \xi) + \int_\xi^\eta q(x, x)\, dx + \int_\xi^\eta \int_\eta^x (f, x, y, z, p, q)\, dy\, dx, \quad (3)$$

$$p(\xi, \eta) = p(\xi, \xi) + \int_\xi^\eta f(\xi, y, z, p, q)\, dy,$$

$$q(\xi, \eta) = q(\eta, \eta) - \int_\xi^\eta f(x, \eta, z, p, q)\, dx \quad (4)$$

для точек, находящихся выше прямой $y = x$, и аналогичным формулам для точек, находящихся ниже прямой $y = x$. Соответственно этим двум интегральным формам задачи (1), (2), рассматриваются отдельно для точек, находящихся выше и ниже прямой $y = x$ экстраполяционные и интерполяционные формулы, получающиеся заменой подынтегральных функций в интегральных формах соответствующими полиномами. Например, экстраполяционные формулы для точек, находящихся выше прямой $y = x$, имеют вид

$$z_{r,s+1} = z_{r,s} + h \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^\mu \beta_\mu^* \Delta_x^\mu q_r - h^2 \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{m-\mu} \beta_{\mu,\nu} \nabla_x^\mu \nabla_y^\nu f_{r,s},$$

$$p_{r,s+1} = p_{r,s} + h \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \nabla_y^\nu f_{r,s},$$

$$q_{r,s+1} = q_{r+1,s+1} - h \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu \beta_\mu \nabla_x^\mu f_{r+1,s+1},$$

$$f_{r,s+1} = f(x_r, y_{s+1}, z_{r,s+1}, p_{r,s+1}, q_{r,s+1}),$$

$$\beta_{\mu,\nu} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!} \int_0^1 (u-1)u\ldots(u+\mu-2) \times \left[\int_0^u (v-1)\ldots(v-\nu)\,dv\right] du,$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\lambda!} \int_0^1 u(u+1)\ldots(u+\lambda-1)\,du,$$

$$\beta_\lambda^* = \frac{1}{\lambda!} \int_0^1 (u-1)u(u+1)\ldots(u+\lambda-2)\,du.$$

Погрешность аппроксимации уравнений (1), (2) этими формулами не приводится. Подробнее рассматриваются более точные интерполяционные формулы. В частности, интерполяционные формулы предлагается использовать для просчета узлов, находящихся вблизи начальной прямой $y = x$. При этом выводятся соответствующие оценки погрешности аппроксимации и устанавливается сходимость итераций. Основной результат автора заключается в доказательстве сходимости при $h \to 0$ решения, полученного при помощи интерполяционных (или экстраполяционных) формул, к точному решению задачи (1), (2). Рассмотрен один числовой пример. Численная устойчивость методов решения задачи (1), (2) не исследуется. В. К. Саульев

**1 В253. О разностной аппроксимации Нёймана гиперболического уравнения.** Lees Milton. Von Neumann difference approximation to hyperbolic equations. «Pacif. J. Math.», 1960, **10**, № 1, 213—222 (англ.)

Известно, что сеточное уравнение Нёймана

$$v_{\bar{t}t} = v_{\bar{x}x} + \alpha k^2 v_{\bar{x}x\bar{t}} \quad (1)$$

(здесь использованы обозначения:

$$v_x = \frac{1}{n}[v(x+h,t) - v(x,t)], v_{\bar{x}} = \frac{1}{n}[v(x,t) - v(x-h,t)],$$

$$v_{\bar{t}} = \frac{1}{k}[v(x,t+k) - v(x,t)]$$

и. т. д.), где $\alpha$ — некоторый параметр, аппроксимирующее с погрешностью $O(h^2+k^2)$ дифференциальное уравнение

$$\partial^2 U/\partial t^2 = \partial^2 U/\partial x^2, \quad (2)$$

безусловно, т. е. для всех положительных значений $R = k/h$, устойчиво при $\alpha \geqslant 1/4$ и условно устойчиво при $\alpha < 1/4$. В последнем случае условие устойчивости имеет вид $R \leqslant (1-4\alpha)^{-1/2}$. Автор вместо уравнения (2) исследует гиперболическое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a(x,t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial U}{\partial x} + c(x,t)\frac{\partial U}{\partial t} + d(x,t)U + e(x,t) \quad (3)$$

с граничными и начальным условиями

$$U(x,0) = f(x), \ \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = g(x), \ U(0,t) = h_0(t), \ U(1,t) = h_1(t). \quad (4)$$

Для аппроксимации уравнения (3) используются следующие два обобщения сеточного уравнения Нёймана (1):

$$v_{t\bar{t}} = a(x,t)v_{x\bar{x}} + \alpha k^2 v_{x\bar{x}t\bar{t}} + b(x,t)v_{\bar{x}} + c(x,t)v_{\bar{t}} + d(x,t)v + e(x,t), \quad (5)$$

$$v_{t\bar{t}} = a(x,t)v_{x\bar{x}} + a(x,t)\alpha k^2 v_{x\bar{x}t\bar{t}} + b(x,t)v_{\bar{x}} + c(x,t)v_{\bar{t}} + d(x,t)v + e(x,t), \quad (6)$$

где положено $v_x = \frac{1}{2h}[v(x+h,t) - v(x-h,t)]$, $v_{\bar{t}} = \frac{1}{2k}[v(x,t+k) - v(x,t-k)]$. Дополнительные условия (4) аппроксимируются соответственно при помощи формул

$$v(x,0) = f(x), \ v(x,k) = f(x) + kg(x) + k^2/2[a(x,0)f''(x) + b(x,0)f'(0) + c(x,0)g(x) + d(x,0)f(x) + e(x,0)]^2, \quad (7)$$

$$v(0,t) = h_0(t), \ v(1,t) = h_1(t).$$

Основной результат автора заключается в доказательстве так называемого энергетического неравенства

$$\| v \|^2_{1,t} \leqslant c[\| v \|^2_{1,k} + k\sum_{\tau=k}^{t-k} * \| e \|^2_{0,\tau}] \quad (8)$$

(сеточного аналога соответствующего энергетического неравенства для случая дифференциальных уравнений), которому удовлетворяет при $4\alpha - a(x,t) > 0$ решение сеточного уравнения (5), удовлетворяющее однородным краевым условиям. В (8) использованы обозначения $\| v \|^2_{0,t} = h\sum_{n=1}^{N} v^2(nh,t)$ $* \| v \|^2_{0,t} = h\sum_{n=1}^{N-1} v^2(nh,t)$, $\| v \|^2_{1,t} = \| v_{\bar{t}} \|^2_{0,t} + 1/2\{\| v_{\bar{x}} \|^2_{0,t} + \| v_{\bar{x}} \|^2_{0,t-k}\}$, $(Nh = 1, Mk = T)$ и постоянная $c$ зависит только от $\alpha, T$ ($T$ — конечное значение $t$) и коэффициентов уравнения (5). Из неравенства (8) в качестве следствия вытекает безусловная устойчивость уравнения (5), в случае, когда $4\alpha - a(x,t)$ ограничена снизу нулем. Однако, как отмечает автор, этот метод не дает возможности исследовать условную устойчивость сеточного уравнения (5). Неравенство (8) позволяет автору легко доказать единственность решения уравнения (5), удовлетворяющего условиям (7). Без доказательства формулируется теорема о сходимости: при некоторых условиях ошибка при $h \to 0$ и $k \to 0$ убывает по закону $\max | U(x,t) - v(x,t) | \leqslant B(h^2+k^2)$, где $B$ — постоянная, не зависящая от $h$ и $k$. В заключение автор отмечает, что энергетическое неравенство (8) при условии $4\alpha - 1 > 0$ справедливо для сеточного уравнения (6).

В. К. Саульев

**1 В254. О численном решении интегральных уравнений методом квадратурных формул.** Brakhage Helmut. Über die numerische Behandlung von Integralgleichungen nach der Quadraturformelmethode. «Numer. Math.», 1960, 2, № 3, 183—196 (нем.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$x(s) + \int_0^1 k(s,t)\,x(t)dt - f(s) = 0 \ (0 \leqslant s \leqslant 1), \quad (1)$$

$[(I+K)x - f = 0]$, где $k(s,t)$ и $f(s)$ — непрерывные функции. При помощи квадратурной формулы $\int_0^1 u(t)dt \approx \approx \sum_{j=1}^{m} A_j u(t_j)$ уравнение (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$y(t_i) + \sum_{j=1}^{m} k(t_i, t_j)A_j y(t_j) - f(t_i) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2)$$

$[(I+H)y - f = 0]$. Более грубая квадратурная формула $\int_0^1 u(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^{m'} A'_j u(t'_j)$ $(m' < m)$ приводит к системе

$$y'(t'_j) + \sum_{j=1}^{m'} k(t'_i, t'_j)\,A'_j\,y'(t'_j) - f(t'_i) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m') \quad (3)$$

$[(I+H')y' - f]$. Для приближенного решения уравнения (1), вместо обычного решения системы (2), где $m$ относительно велико, автор предлагает следующий итерационный метод (метод «поправок»). Сначала решается система (3) (где $m'$ относительно мало), решение которой $y'$ выбирается в качестве начального приближения $y_0$. Затем по формуле $y'(s) = f(s) - \sum_{j=1}^{m'} k(s,t'_j)\,A'_j\,y'(t'_j)$ вычисляется $y_0 = y'$ в точках $t_i$ и проверяется величина дефекта (невязки) по формуле $r_0(s) = y_0(s) + \sum_{j=1}^{m} k(s,t_j)\,A_j\,y_0(t_j) - f(s)$ $(s = t_j, t'_j)$. Если невязка $r_0(s)$ велика, то вычисляется новое приближение согласно формул

$$y_1(s) = y_0(s) - r_0(s) + z_0(s) \ (s = t'_i),$$

$$z_0(t'_i) + \sum_{j=1}^{m} k(t'_i, t'_j)\,A'\,z_0(t'_j) = r_0^*(t'_i) \quad (i = 1,2,\ldots,m'), \quad (4)$$

$$r_0^*(s) = Hr_0 = \sum_{j=1}^{m} k(s,t_j)\,A_j\,r_0(t_j) \ (s = t'_i).$$

После этого процесс повторяется. Для вычисления $y_n(s)$ в точках $s = t_i$ автор рекомендует использовать интерполяцию по известным значениям в точках $s = t'_i$. Доказывается, что так определенный итерационный процесс сходится к решению системы (2), при условии, если

$$\| (I+H')^{-1}(H' - H)H \| < 1, \quad (5)$$

где норма определяется согласно соотношению $\| T \| = \sup\{\| Tu \| (\| u \| = 1)\}$, $\| u \| = \max\{|u(t)|$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)\}$. Неравенство (5) всегда может быть выполнено при достаточно точной квадратурной формуле. Устанавливается неравенство $\| (H' - H)H \| \leqslant \alpha(\delta + \delta')$, где $\alpha = \sum_{j=1}^{m} | A_j |$, а $\delta$ и $\delta'$ — ошибки квадратур,

определяемые из соотношений $|(K-H)_\tau k(\tau,t)|\leqslant$, $|(K-H')_\tau k(\tau,t)|\leqslant\delta'$. Выводится оценка погрешности $|x(t_i)-x_0(t_i)|\leqslant p\left[\left(M+\frac{1}{p}\right)\max_j|r_0(t_j)|+\varepsilon+\right.$ $\left.+\alpha\delta\max_j|x_0(t_j)|\right]$, где $x$ и $x_0$ — соответственно точное и приближенное решения уравнения (1), а величины $p$ (в случае $\|K\|<1$), $\varepsilon$ и $M$ определяются из соотношений $p=(1-\|K\|)^{-1}$, $|(K-H)f|\leqslant\varepsilon$,

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{m}|A_jk(s,t_j)|\ \ (0\leqslant s\leqslant 1)\right\}\leqslant M.$$

Если $\|K\|\geqslant 1$ и обратная матрица системы (2) $B=\{b_{i,k}\}=\{\delta_{i,k}-k(t_i,t_k)A_k\}^{-1}$ известна, то

$$p=\frac{1+\|K\|(1+\beta M)}{1-(1+\beta M)\delta},$$

где $\beta=\max_i\sum_{k=1}^{m}|b_{i,k}|$. Автор дает ряд советов по практическому применению его метода. В частности, он рекомендует выбирать значения $t_i'$ среди значений $t_i$. Отмечается, что часто уже первая итерация приводит к удовлетворительным результатам. Метод допускает обобщение на случай однородного уравнения (задача на собственные значения). Приведено два числовых примера. В. К. Саульев

**1 В255. О сохранении свойства устойчивости решения интегро-разностного уравнения при изменении его шага.** Либерман Л. Х. «Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н.», 1959, № 2, 46—48

Рассматривается интегро-разностное уравнение

$$\varphi^h_{i+1}-\varphi^h_i=h\left[\int_a^b K(x,s,h,t^h_i,\ \varphi^h_i(s))\,ds+\right.$$
$$\left.+F(x,h,t^h_i,\varphi^h_i(x))\right],\qquad(1)$$

где $\varphi^h_i(x)=\varphi^h(x,t_i)$, и это же уравнение с шагом $l<h$. Относительно функций $R$ и $F$ делаются естественные ограничения. Тривиальное решение (1) называется устойчивым по показательному закону, если для любого решения $\varphi^h_i(x)$ при условии $|\varphi^h_0|<\delta$ имеет место неравенство $|\varphi^h_i(x)|<B\cdot\delta\cdot e^{-\alpha(t_i-t_0)}$, где $B,\alpha>0$. Теорема 1. Если при некотором $h>0$ тривиальное решение (1) устойчиво по показательному закону, то при достаточно малом $\nu>0$ тривиальное решение уравнения с шагом $l>0$, $h-\nu<l<h$ тоже устойчиво по экспоненциальному закону. Приводится пример, показывающий невозможность уменьшения шага до нуля с сохранением устойчивости по показательному закону (и просто устойчивости). Теорема 2. Если при некотором $h>0$ тривиальное решение (1) равномерно асимптотически устойчиво, то для любого $\varepsilon$ существуют $\delta(\varepsilon)$ и $\nu(\varepsilon)$ такие, что для всякого $l\in(h-\nu,h)$ и $|\varphi^l_0|<\delta$ имеет место неравенство $|\varphi^l_i|<\varepsilon$ при $t_i>t_0$. А. Л. Крылов

**1 В256. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов.** Коробов Н. М. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 4, 19—25

Рассматривается класс функций $f(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}C(m_1,\ldots,m_s)\exp(2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s))$ таких, что $|C_1(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant C_1[\psi(m_1)\ldots(\psi(m_s)]^{-\alpha}$. Здесь $\alpha>1$, $\psi(m)\geqslant|m|$ четная, $\sum_{m=1}^{\infty}(\psi(m))^{-\alpha}<\infty$, выражение $m^{-1}\psi(m)$ монотонно при $m>0$ и для всякого $\eta>0$ имеет место $\psi(m)=o(|m|^{1+\eta})$. Указывается способ построения квадратурных формул для вычисления интеграла $\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s$ по значениям функции $f(x_1,\ldots,x_s)$ в $p$ точках, для которых остаточный член есть $O(p^{-\alpha})$. Показывается, что среди квадратурных формул рассматриваемого в работе вида нет формул с остаточным членом $O(p^{-\alpha-\varepsilon})$ ни при каком $\varepsilon>0$. Производятся аналогичные оценки для некоторого расширения указанного выше класса. Н. С. Бахвалов

**1 В257. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций.** Шарыгин И. Ф. «Докл. АН СССР», 1960, **132**, № 1, 71—74

Рассматривается класс функций $H_\alpha(s,c)$, определенный условиями $\left|f^{\gamma_1\ldots\gamma_s}_{x_1\ldots x_s}\right|\leqslant c$, $0\leqslant\gamma_i\leqslant\alpha$, $0\leqslant\gamma_i\leqslant\alpha$, $\gamma_1+\ldots+\gamma_s=n$. Показывается, что при помощи замены переменных вида $x_i=\tau_\alpha(z_i)$ вычисление $\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)dx_1\ldots dx_s$ может быть сведено к вычислению $\int_0^1\ldots\int_0^1 F(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s$, где $F(x_1,\ldots,x_s)\in H_\alpha(s,c')$ и периодическая с периодом 1 по каждой из переменных. В последнем случае для вычисления интеграла может быть применен метод оптимальных коэффициентов (реф. 1В256). Замены переменных такого вида позволяют также производить уничтожение особенностей в подынтегральных функциях. Показывается возможность непосредственного применения метода оптимальных коэффициентов для вычисления интегралов от непериодических функций класса $H_1(s,c)$. В этом случае остаточный член есть $O(N^{-1}\ln^s N)$. Эти оценки позволяют автору применить метод оптимальных коэффициентов для решения интегральных уравнений вольтерровского типа по некоторым из переменных. Н. С. Бахвалов

**1 В 258. Об эффективности одной псевдослучайной последовательности точек, применяемой для оценки многомерных интегралов.** Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. «Numer. Math.», 1960, **2**, № 2, 84—90 (англ.)

Рассматривается задача о вычислении интеграла $\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_k)dx_1\ldots dx_k$ по формуле $\sum_n w_n f(P_n)$; здесь $P_n$ — точки некоторой последовательности, $f(P)$ — характеристическая функция прямоугольника $A:\{0\leqslant x_l\leqslant A_l\}$. Пусть целое число $n$ представляется в $R$-ичной системе счисления в виде $n=n_M\ldots n_0=n_0+n_1R+\ldots+n_MR^M$, где $M=[\log_R n]$. Положим $\varphi_R(n)=n_0R^{-1}+\ldots+n_MR^{-M-1}$. Пусть $V=A_1\ldots A_k$, $S_N(A)$ — число точек $R_i\subset A$ $(i=1,\ldots,N)$. Доказывается, что при $R_1,\ldots,R_k$ — взаимно простых, $P_n=(\varphi_{R_1}(n),\ldots,\varphi_{R_k}(n))$ справедливо $\sup|S_N(A)-NV|=O(\ln^k N)$. При $P_n=(n/N,\varphi_{R_1}(n),\ldots,\varphi_{R_{k-1}}(n))$ имеет место $\sup_A|S_N(A)-NV|=O(\ln^{k-1}N)$. Приводится теорема: Для любой последовательности точек $\{P_n\}$ имеет место

$$\int_0^1\ldots\int_0^1|S_N(A)-NV|^2dA_1\ldots dA_k\geqslant c_k(\ln N)^{k-1}>0.$$

Из этой теоремы и из некоторых соображений о завышенности приведенных оценок следует, что приведенная последовательность точек близка по своим характеристикам к оптимально возможной последовательности псевдослучайных точек. Приведена схема программ вычисления последовательности чисел $\{\varphi_R(n)\}$ по рекуррентным формулам. Н. С. Бахвалов

**1 В259. Пример вычисления системы двойных интегралов с кривой линейной границей при помощи счетно-аналитических машин.** Petrželka Jiří, Slavíček Oldřich. Příklad výpočtu soustavy dvojných integrálů s křivou mezí na strojích na děrné štítky. «Stroje zpracov. inform.», 1958, № 6, 285—288 (чешск.; рез. русск., англ.)

Сообщение о вычислении двойных интегралов

$$I_1 = \int_{\Theta_m}^{\upsilon_0+c} d\Theta \int_0^{1/2\pi} \cos^{3/2}\Phi A^{3/2} \cos^{n+1}\Phi \cos^n(\upsilon_0-\Theta)\, d\Phi, \quad (1)$$

$$I_2 = \int_{-\Theta_m}^{+\Theta_m} d\Theta \int_0^{\Phi_{\max}} \cos^{3/2}\Phi B^{3/2} \cos^{n+1}\Phi \cos^n(\upsilon_0-\Theta) d\Phi, \quad (2)$$

где $\Phi_{\max}$ определено равенством

$$\operatorname{tg}\Phi_{\max} = \frac{\cos\theta}{k} \quad (3)$$

и $k, \Theta_m$ — заданные постоянные, $n, \upsilon_0$ — параметры, $A, B$ — гониометрические полиномы; вычисление произведено при помощи счетно-аналитических машин ARITMA чехословацкой продукции. Для достижения требуемой точности использована формула Котесса 6-й степени. Область интегрирования в соотношении (2) разбита системой равноотстоящих параллельных линий (переменная $\theta$) и системой кривых (от переменной $\Phi$), координаты которых вычислены при помощи соотношения (3) отдельно от основного вычисления при помощи ручной счетно-цифровой машины. S. Maloň

**1 В260. О некоторых методах вычисления полного эллиптического интеграла первого рода.** Novák Mirko. O některých metodách výpočtu číselné hodnoty úplného eliptického integrálu prvého druhu. «Slaboproudý obzor», 1958, **19**, № 8, P25—P28 (чешск.)

Статья посвящена некоторым методам вычисления полного эллиптического интеграла первого рода $K(\kappa)$ ($\kappa$ — модуль), которые позволяют достичь большой точности результата. После оценки точности значений $K(\kappa)$, приведенных в некоторых таблицах эллиптических функций, вводятся следующие методы: вычисление значения $K(\kappa)$ посредством арифметическо-геометрического центра, вычисление при помощи логарифмического разложения и вычисление посредством тэта функций. В заключение указаны некоторые возможности для вычисления эллиптической модулярной функции $q(\kappa)$.

V. Doležal

**1 В261. Радиация поля из прямоугольного источника.** Hubbell J. H., Bach R. L., Lamkin J. C. Radiation field from a rectangular source. «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1960, **C64**, № 2, 121—138 (англ.)

Интегралы типа $\int_S (\cos\vartheta\, dS/r^2) P_l(\cos\theta)$ и $\int_S (dS/r^2) \exp(-\mu t/\cos\theta)$ вычисляются при помощи разложений в ряды Лежандра.

**1 В262. О точности формулы автора для вычисления скорости течения в трубе и о модификации обыкновенной формулы.** Kasugaya Nobumasa. On the accuracies of the author's formulas for calculating the discharge rate in a pipe and on the modification of the ordinary formula. «Добоку гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Civil Engrs», 1959, № 65, 16—24 (японск.; рез. англ.)

Вычисляются остаточные члены некоторых квадратурных формул.

**1 В263. Квадратурные формулы с внешними узлами.** Ionescu D. V. Formule di cuadratură cu noduri exterioare. «Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj», 1958, **9**, № 1-4, 45—134 (рум.; рез. русск., франц.)

Подробно исследован класс квадратурных формул с абсциссами, выходящими за промежуток интегрирования. Конструируются квадратурные формулы, удовлетворяющие определенным условиям и оценивается погрешность от использования этих формул. Выявляются путем сравнения практически ценные квадратурные формулы, роль которых особенно значительна при интегрировании дифференциальных уравнений, а также при построении начальной таблицы для решения интегрального уравнения типа Вольтерра. В § 1 строится квадратурная формула вида $\int_a^b p(x) f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_m' f(x_m') + (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x_m} \varphi(x) f^{(n+m)}(x)\, dx$, которая при помощи функции $\varphi(x)$ совпадает на отрезках $[x_n, x_{n-1}], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$ с интегралами соответствующих дифференциальных уравнений, являющимися многочленами $n+m-1$ степени. В § 2 аналогичным путем строится квадратурная формула с внешними узлами, к которым добавляются узлы $a$ и $b$. В § 3 построена квадратурная формула с узлом $a$ и с внешними узлами, расположенными слева от $a$. В § 4 устанавливается формула вида $\int_a^b f(x)\, dx = 2h[f(x_1) + I_1 \Delta^1 f(x_2) + I_2 \Delta^2 f(x_3) + \ldots + I_{n-1} \Delta^{n-1} f(x_n)] + (2h)^{n+1} I_n f^{(n)}(\xi)$. Показывается, что квадратурные формулы с внутренними узлами гауссова типа лучше формул с внешними узлами. В § 5 устанавливается квадратурная формула

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\, dx = h\left\{\left[f(x_1) + f(x_1')\right] + K_1[\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)] + K_2[\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2)] + \ldots + K_{n-1}\left[\Delta^{(2n-1)} f(x_n) + \Delta^{(2n-1)} f(x_{n-1})\right]\right\} + (2h)^{2n+1} K_n f^{(2n)}(\xi), \quad (2)$$

где $K_j = \frac{1}{2^{2j+1}(2j)!} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2-1)(\lambda^2-3^2)\ldots[\lambda^2-(2j-1)^2]\, d\lambda$,

с симметричными по отношению к середине промежутка интегрирования $x_0$ внешними узлами, расположенными по арифметической прогрессии. В § 6 изучается влияние внутренних узлов на вид кривой $y = \varphi(x)$ для квадратурной формулы с узлами $a$, $a+h$, являющимися концами промежутка интегрирования с внешним узлом $a+2h$ и с внутренним узлом $a+\lambda h$. В § 7 исследуется квадратурная формула Кристоффеля с внешними узлами $x_1', \ldots, x_n'$, расположенными слева от $a$, с внешними узлами $x_1'', \ldots, x_m''$ — справа от $b$ и с внутренними узлами $x_1, \ldots, x_q$, рассматриваемыми как двойные. В § 8 анализируется изученная в § 7 задача с добавочными узлами $a, b$ или только одним из узлов $a$ или $b$. В § 9 рассматриваются квадратурные формулы с узлами $a, b$, $(a+b)/2$ и с симметричными относительно середины промежутка $(a, b)$ внешними узлами, расположенными по арифметической прогрессии с разностью $h = (b-a)/2$. Устанавливается квадратурная формула

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\, dx = 2h[f(x_0) + L_1 \Delta^2 f(x_{-1}) + L_2 \Delta^4 f(x_{-2}) + \ldots + L_n \Delta^{2n} f(x_{-n})] + 2h^{2n+3} L_{n+1} f^{(2n+2)}(\xi). \quad (3)$$

Сравнение отношений между верхними гранями абсолютных величин остаточных членов указывает на преимущества формулы (3) по сравнению с формулами (1) и (2). Приведены многочисленные примеры формул перечисленных типов, которые показывают, что предпочтительнее пользоваться квадратурными формулами гауссова типа с внутренними узлами.

И. Ф. Шелихова

**1 В264. Недавние достижения в релаксационной технике.** Stiefel E. Recent developments in relaxation-techniques. «Proc. Internat. Congr. Mathematicians 1954,

Amsterdam». Vol. 1. Groningen — Amsterdam, 1957, 384—391 (англ.)

Статья обзорного характера. Рассматриваются вопросы решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = k, \qquad (1)$$

где $A$ — симметричная, положительно определенная матрица, линейными итерационными (релаксационными) методами. Более подробно исследуется «скалярный» итерационный процесс второй степени

$$\Delta x_{i+1} = a_i r_i + c_i \Delta x_i, \qquad (2)$$

где $a_i$ и $c_i$ — некоторые скаляры, $r_i = k - Ax_i$ — невязка $i$-й итерации $x_i$, $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ — поправка, $x_0$ — начальное приближение, $x_0 = 0$. Рассматривается задача «о наилучшей стратегии»: Для данного числа $n$ шагов определить скаляры $a_i$ и $c_i$ в (2) так, чтобы $x_n$ было по возможности близко к решению $x = A^{-1}k$ системы (1). При этом в качестве меры близости выбирается величина

$$\varphi_n = (Ay_n, y_n) = (A^{-1}r_i, r_i), \qquad (3)$$

где $y_n = A^{-1}k - x_n$. Отмечаются следующие преимущества $\varphi$-меры (3): 1) Она инвариантна при преобразованиях координат; 2) если данная система (1) есть система нормальных уравнений проблемы обработки наблюдений, то мера $\varphi$ является суммой квадратов ошибок. Задача наилучшей стратегии сводится к нахождению полинома $R_n(\lambda)$ степени $n$, принимающего по возможности малые значения в области изменения собственных значений данной матрицы $A$ и $R_n(0) = 1$. При этом $r_n = R_n(A)\,k$ и

$$\varphi_n = \sum_{(j)} \frac{R_n^2(\lambda_j)}{\lambda_j} k_j^2 . \qquad (4)$$

Вместо (4) автор рассматривает более общую «непрерывную» меру ошибки

$$\psi_n = \int_0^1 \frac{R_n^2(\lambda)}{\lambda} \rho(\lambda)\, d\lambda, \qquad (5)$$

где $\rho(\lambda)$ — произвольная функция плотности. Утверждается, что величины (5) являются минимальными в случае, когда полиномы $R_0(\lambda), R_1(\lambda), \ldots, R_n(\lambda)$, равные 1 при $\lambda = 0$, образуют ортогональную систему с весом $\rho(\lambda)$. В этом случае они удовлетворяют рекуррентному соотношению $R_{i+1}(\lambda) = (1 + c_i - a_i\lambda)R_i(\lambda) - c_i R_{i-1}(\lambda)$. Несколько подробнее автор останавливается на выборе функции плотности $\rho(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Если неизвестна нижняя граница собственных значений, то можно взять $\rho(\lambda) = \lambda^\alpha (1-\lambda)^\beta f(\lambda)$, где $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $0 < c_1 \leqslant f(\lambda) \leqslant c_2$. В простейшем случае $f(\lambda) \equiv 1$ это ведет к гипергеометрическим полиномам $R_n(\lambda) = F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \lambda)$ (случай $\alpha = {}^1/_2$, $\beta = -{}^1/_2$ рассмотрен Ланцошом). Если известная нижняя граница $\varepsilon > 0$, то тогда $\rho(\lambda)$ должно быть равной 0 в интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant \varepsilon$. В остальной части $\varepsilon \leqslant \lambda \leqslant 1$ наилучшую стратегию доставляют полиномы Чебышева. Если использовать «дискретную» меру ошибки $\varphi$, согласно (4), которой соответствует функция плотности $\rho(\lambda) = \sum_{(j)} k_j^2 \delta(\lambda - \lambda_j)$, где $\delta$ — функция Дирака, то получим $(r_p, r_q) = 0$ $(p \neq q)$, т. е. метод, приводящий к точному решению за конечное число шагов. Автор отмечает, что среди всех скалярных итерационных методов этот метод (метод сопряженных градиентов) является лучшей стратегией в смысле $\varphi$-меры ошибки (4). В. К. Саульев

**1 В265. Решение систем линейных алгебраических уравнений на счетно-перфорационных машинах системы «Голлерит».** Németh Ferenc, Hunfalvy Tibor. Lineáris egyenletrendszer megoldása lyukkártyás számológépekkel. «Mélyépítéstud. szemle», 1959, **9**, № 9, 432—439 (венг.; рез. русск., нем., франц., англ.)

Описан комплект счетно-перфорационных машин системы «Голлерит» с указанием назначения и (весьма кратко) принципов действия отдельных машин комплекта. Для решения систем линейных алгебраических уравнений применяется обычная схема Гаусса. При этом деление производится на мультиплейере с помощью обратных чисел, вычисляемых в каждом случае на малых вычислительных машинах с десятью значащими цифрами. Приведен пример решения системы шести линейных уравнений с шестью неизвестными. Х. М. Коган

**1 В266. Решение систем линейных уравнений методом симплекса.** Krekó Béla. Lineáris egyenletrendszerek megoldása szimplex módszerrel. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1959, **4**, № 3-4, 265—275 (венг.; рез. русск., англ.)

Несколько измененный метод симплекса, введенный в линейное программирование Данцигом, применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений и нахождения обратных матриц.

**1 В267. Оценки погрешности метода итераций Шульца для определения обратной матрицы.** Dück W. Fehlerabschätzungen für das Iterationsverfahren von Schulz zur Bestimmung der Inversen einer Matrix. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 4, 192—194 (нем.)

Итерационный метод Шульца для вычисления матрицы $X$, обратной квадратной неособой матрице $C$, записывается в виде рекуррентной формулы

$$X_{n+1} = X_n(2E - CX_n), \qquad (1)$$

где $X_n$ — $n$-е приближение к $X$, $E$ — единичная матрица. Автор выводит следующие оценки для погрешности $(n+1)$-го приближения

$$\| X - X_{n+1} \| \leqslant \frac{\| E - CX_n \|^2}{1 - \| E - CX_n \|} \| X_n \|,$$

$$\| X - X_{n+1} \| \leqslant \frac{q^{2^{n+1}}}{1 - q^{2^n}} \| X_n \|,$$

где $q = \| E - CX_0 \|$, а норма матрицы определяется согласно соотношению $\| A \| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|$ ($a_{i,k}$ — элементы матрицы $A$). В. К. Саульев

**1 В268. Новый вывод тождеств Ньютона и их применение к вычислению собственных чисел матрицы.** Baker George A., Jr. A new derivation of Newton's identities and their application to the calculation of the eigenvalues of a matrix. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1959, **7**, № 2, 143—148 (англ.)

Проводится анализ погрешностей при вычислении собственных чисел матрицы $A$ методом Леверрье (реф. 1В309К). Предполагается, что при каждом вычислении новой степени матрицы по формуле $A^n = A^{n-1} \cdot A$ матрица погрешностей состоит из независимых, нормально распределенных случайных величин с одинаковой дисперсией, пропорциональной среднему квадрату элемента матрицы $A^n$. В связи с анализом погрешностей дается ряд рекомендаций по проведению вычислений и, в частности, отмечается необходимость проведения счета с повышенной точностью (в некоторых случаях) при вычислении коэффициентов характеристического многочлена по формулам Ньютона. Случай унитарности матрицы особенно благоприятен для вычислений. Дается также новый вывод тождеств Ньютона. М. Л. Бродский

**1 В269. Формулы преобразования коэффициентов в методе Лемера численного решения алгебраических уравнений.** Костовский А. Н. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 4, 738—741

Выводятся (см., например, РЖМат, 1957, 2702) формулы преобразования коэффициентов в методе Лемера и указывается путь для создания однообразной вычислительной схемы. Рассматривается вопрос о числе преобразований, необходимом для достижения заданной точности. В. Л. Загускин

**1 В270. Новый метод вычисления квадратных корней, не требующий деления.** Sarafyan Diran A new method of computation of square roots without using division. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 11, 23—24 (англ.)

Ранее автор предложил метод, обобщающий метод Ньютона для извлечения корней. Для корней второй степени итерационная формула имеет вид

$$r_{i+1}=\frac{1}{\alpha_i+\beta_i}\left[\alpha_i\frac{n}{r_i}+\beta_i r_i\right],$$

где $r=\sqrt{n}$, $r_i$ — приближение к $r$, $\alpha_i$ и $\beta_i$ — параметры. Если $r_i$ очень близко к $r$, то следует брать $\alpha_i=\beta_i$ и процесс превращается в процесс Ньютона. Однако пока приближение грубое, выгодно брать $\alpha_i\neq\beta_i$. На числовых примерах указывается методика подбора этих параметров. Приводится также формула другого итерационного процесса, в которо м не требуется деления: $r_{i+1}=r_i+(n-r_i^2)k_i$, где $k_i$ — параметр. В. Л. Загускин

**1 В271. Применение функционального метода Рауса для численного решения алгебраических уравнений.** Mack C. Routh test function methods for the numerical solution of polynomial equations. «Quart. J. Mech. and Appl. Math.», 1959, **12**, № 3, 365—378 (англ.)

Построение ряда функций Рауса, которое используется обычно для определения числа корней (многочлена с действительными коэффициентами), имеющих положительную действительную часть, предлагается использовать наряду с некоторыми оценками для приближенного определения самой действительной части корня. Найденное число затем уточняется путем замены переменного и повторного применения того же метода. Указываются также способы нахождения мнимой части корня. В. Л. Загускин

**1 В272. О сходимости итерационных методов решения системы нелинейных уравнений.** Sisler Miroslav. O konvergenci iteračních metod řešení soustavy nelineárnich rovnic. «Aplikace mat.», 1960, **5**, № 2, 141—150 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор занимается исследованием сходимости последовательности аппроксимаций $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — $n$-мерный вектор и $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ — векторная функция. Он приводит достаточные условия, при которых последовательность $\{x_k\}$ сходится и при которых в некотором шаре с центром $x$ существует точно одна неподвижная точка $a$, $a=\varphi(a)$, и производит оценку погрешности $k$-й аппроксимации. M. Švec

**1 В273. Решение уравнений методами Чебышева.** Воронцов Б. Д. «Тр. Уральского политехн. ин-та», 1959, сб. 79, 15—24

Пусть $w=f(x)$ — вещественная, $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая на $I=[a, b]$ функция, $f'(x)$ не обращается в нуль на $I$, а $f(x)$ имеет нуль $x=x^*$ на $I$. Пусть $x=\varphi(w)$ — обратная функция. Методом Чебышева $n$-го порядка для приближения корня $x^*$ автор называет метод итераций $x_{m+1}=F(x_m)$ $(m=0,1,2,\ldots)$, где $F(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\varphi^{(k)}[f(x)]}{k!}[f(x)]^k$. Приводятся достаточные условия сходимости метода Чебышева и дается его обобщение. С. И. Зуховицкий

**1 В274. О сходимости итерационных процессов для решения совместных уравнений от многих переменных.** Bodmer W. F. On the convergence of iterative processes for the solution of simultaneous equations in several variables. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 3, 286—289 (англ.)

Устанавливается квадратичная сходимость итерационного процесса Ньютона для решения системы $r$ совместных уравнений с $r$ неизвестными $f_i(x_1, \ldots, x_r)=0$ $(i=1, \ldots, r)$.

**1 В275. Обратная задача о собственных значениях для конечных матриц и ее графическое решение для $n=3$.** Heinrich Helmut. Ein inverses Eigenwertproblem für endliche Matrizen und seine graphische Lösung für $n=3$. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 1-3, 62—64 (нем.)

Излагается метод приближенного решения часто встречающейся в теории колебаний механических систем обратной задачи о собственных значениях, состоящей в том, что для данной матрицы $A=(a_{ik})$ порядка $(n, n)$ требуется определить такую диагональную матрицу $D=<d_i>$, чтобы произведение матриц $P=AD$ имело собственные значения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Дается анализ решения указанной задачи при любом $n$. В результате преобразований и на основании теоремы Виетта задача сводится к нелинейной системе уравнений, которую решают методом итераций, причем в качестве исходного приближения, по теореме Геронимуса, может быть взята матрица $D^{(0)}=\bar{A}^{-1}M$, где $\bar{A}^{-1}$ и $M$ — диагональные матрицы и элементами главной диагонали матрицы $M$ являются собственные значения: $\mu_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_2}, \ldots, \mu_{\alpha_n}$. Далее подробно излагается графический метод решения задачи для $n=3$, сущность которого состоит в том, что матрицу $P=AD$, преобразуют в матрицу $P=GX$, где $G=A\bar{A}^{-1}$ и $X=\bar{A}D$, причем матрица $X=<x_i>$ — диагональная, и все элементы главной диагонали матрицы $G$ равны 1. Тогда определяя $X$ так, чтобы $\mu_1$, $\mu_2$ и $\mu_3$ были собственными значениями матрицы $P=GX$, получают решение в виде $D=A^{-1}X$. Полученная в результате этого преобразования упрощенная система уравнений задачи приводится методом исключения к уравнению конического сечения, которое в зависимости от элементов матрицы $A$ является эллипсом, гиперболой или параболой. Дальнейшее решение состоит в построении конического сечения на миллиметровой бумаге и определении $x_1$ и $x_2$ непосредственно из чертежа. Третье неизвестное подсчитывается на основании простой формулы вида: $x_3=-(\mu_1+\mu_2+\mu_3+x_1+x_2)$. И. Ф. Шелихова

**1 В276. Чебышевские приближения рациональными функциями.** Collatz Lothar. Tschebyscheffsche Annäherung mit rationalen Funktionen. «Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg», 1960, **24**, 70—78 (нем.)

Пусть $u_\nu(x_1, \ldots, x_k)$ $(\nu=0, 1, \ldots, q)$ — линейно независимые и непрерывные функции в ограниченной замкнутой связной области $B$ эвклидова $k$-мерного пространства. Непрерывную на $B$ функцию $g(x_1, \ldots, x_k)$ приближают дробью

$$Q=Z/N=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu u_\nu(x_1, \ldots, x_k)/\sum_{\mu=0}^{m}b_\mu u_\mu(x_1, \ldots, x_k)$$

$(m, n\leqslant q)$ в смысле Чебышева. Предполагается, что $\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|+\sum_{\mu=0}^{m}|b_\mu|=1$, $\sum_{\mu=0}^{m}|b_\mu|>0$. Пусть существует дробь $Q_0$, для которой $\|Q_0-g\|=\max_B|Q_0-g|=A<\infty$, и для всякой дроби $Q=Z/N$ из множества $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих неравенству $\|Q-g\|\leqslant A$, знаменатель $N$ отличен от нуля во всей области $B$. Тогда существует дробь $Q$, наименее уклоняющаяся на $B$ от функции $g$. Теорема. Пусть существуют подмножества $M_1, M_2\subset B$ такие, что для любых дробей $Q, Q'\in\mathfrak{M}$ разность $Q-Q'$ не может быть одновременно положительной на $M_1$ и отрицательной на $M_2$, и пусть $Q-g>0$ на $M_1$, $Q-g<0$ на $M_2$. Тогда имеет место неравенство

$$\inf_{x\in M_1, M_2}|Q-g|\leqslant\min_Q\max_{x\in B}|Q-g|.$$

Наконец, рассматриваются приближения дробно-линейными функциями. С. И. Зуховицкий

**1 В277. Наилучшее приближение смешанного типа.** Salzer Herbert E. Best approximation of mixed ty-

ре. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1959, 7, № 4, 345—360 (англ.)

Рассматривается система уравнений $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, где $n > m$ и ранг матрицы коэффициентов равен $m$. Пусть

$$r_i \equiv \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i - b_i,\ M = \min_x \max_i |r_i|$$

и достигается в точке $x_M$; $L = \max_i |r_i|$ в такой точке $x_L$, в которой минимизируется $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$. Пусть $M < R < L$. Ставится задача отыскания точки $x_R$, в которой достигается $\min_x \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = S_R$ при условии $|r_i| \leqslant R$. Доказывается, что $S_R$ — строго убывающая функция на интервале $(M, L)$. Задача, обратная предыдущей, формулируется так: найти точку $x$, в которой достигается $\min_x \max_i |r_i| = D$ при условии, что $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ равна заданному числу $S$, заключенному между $S_L$ и $S_M$, т. е. между значениями $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ в точках $x_L$ и $x_M$. Устанавливается следующая связь с прямой задачей: $D$ равно такому числу $R$, для которого $S_R = S$. Приводится описание конечного алгорифма для решения прямой задачи, заключающийся в последовательном уменьшении на единицу числа неизвестных и уравнений и затем дается решение для случая $m = 1$. Рассматривается также задача определения коэффициентов полинома $R_m(x) \equiv x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$, минимизирующего интеграл $\int_{-1}^{1} R_m^2(x)\,dx$ при условии $|R_m(x)| \leqslant R$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. С. И. Зуховицкий

**1 В278. Замечание о жордановом исключении, линейном программировании и чебышевском приближении** Stiefel E. Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation. «Numer. Math.», 1960, 2, № 1, 1—17 (англ.)

Рассматривается связь между алгорифмами автора (РЖМат, 1960, 5891) и референта (РЖМат, 1954, 2350) для решения несовместной системы линейных уравнений в смысле Чебышева и симплекс-методом Данцига, который применяется для решения указанной чебышевской задачи. Устанавливается эквивалентность этих двух алгорифмов и симплекс-метода для решения чебышевской задачи, причем эти алгорифмы являются двойственными программами в смысле терминологии линейного программирования. Отмечается, что, например, алгорифм автора, приспособленный к вычислительной процедуре линейного программирования, является более экономичным, чем симплекс-метод. С. И. Зуховицкий

**1 В279. Методы наилучшей рациональной аппроксимации. Ч. I. Телескопический метод для непрерывных дробей.** Maehly Hans J. Methods for fitting rational approximations. Part I. Telescoping procedures for continued fractions. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 2, 150—162 (англ.)

Телескопический метод, примененный ранее Ланцошем (РЖМат, 1958, 4265), для приближенного построения полинома, наименее уклоняющегося на малом интервале от функции, заданной степенным рядом, переносится автором на случай функции, заданной разложением в бесконечную непрерывную дробь:

$$f(x) = \frac{a_0}{|\,b_0} + \frac{a_1 x}{|\,b_1} + \ldots + \frac{a_k x}{|\,b_k} + \ldots$$

Пусть усеченная непрерывная дробь $R_{n+1}(x) = \frac{a_0}{|\,b_0} + \ldots + \frac{a_{n+1}x}{|\,b_{n+1}}$ достаточно хорошо приближает $f(x)$ на интервале $[x_1, x_2]$. Требуется найти приближение непрерывной дробью $n$-го порядка $R_n^*(x)$ так, чтобы хотя бы приближенно $R_n^*(x)$ наименее уклонялась на $[x_1, x_2]$ от $f(x)$. Пусть $x = \varepsilon u$, $u \in [u_1, u_2]$, причем $u_2 = 1$, $u_1 = -1$ или $u_1 = 0$. Обозначим $r_k = a_{k+1}/b_k b_{k+1}$. Как известно, из теории непрерывных дробей $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{R_n(\varepsilon u) - f(\varepsilon u)}{\varepsilon^{n+1}} = c_{n+1}u^{n+1}$, где $c_{n+1} = (-1)^n \frac{a_0}{b_0} \prod_{m=0}^{n} r_m$. Приближение $R_n^*(x)$ выбирается так, чтобы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{R_n^*(\varepsilon u) - f(\varepsilon u)}{\varepsilon^{n+1}} = c_{n+1} S_{n+1}(u), \qquad (1)$$

где $S_{n+1}(u) = \sum_{k=0}^{n} s_k u^k + u^{n+1}$ наименее уклоняется от нуля на $[u_1, u_2]$. Таким образом, $R_n^*(x)$ дает почти наилучшее приближение $n$-го порядка функции $f(x)$ при достаточно малом интервале. Приводятся три способа введения поправок в коэффициенты усеченной непрерывной дроби $R_n(x)$ для получения разных $R_n^*(x)$, обладающих свойством (1):

1) $R_n^{a^*} \frac{a_0 + a_0'}{|\,b_0} + \frac{(a_1 + a_1')x}{|\,b_1} + \ldots + \frac{(a_n + a_n')x}{|\,b_n}$, где $a_k' = -a_k s\,[\,\varepsilon)^{n+1-k} \prod_{m=k}^{n} r_m$,

2) $R_n^{b^*} = \frac{a_0}{|\,b_0 + b_0'} + \frac{a_1 x}{|\,b_1 + b_1'} + \ldots + \frac{a_n x}{|\,b_n + b_n'}$, где $b_k' = b_k s_k (-\varepsilon)^{n+1-k} \prod_{m=k}^{n} r_m$,

3) $R_n^{\gamma^*} = \frac{P_n^{\gamma^*}}{Q_n^{\gamma^*}} = \frac{P_n + \gamma_0 + x\sum_{k=2}^{n} \gamma_k P_{k-2}}{Q_n + x\gamma_1 + x\sum_{k=2}^{n} \gamma_k Q_{k-2}}$, где $R_n(x) = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$ — $m$-я подходящая дробь функции $f(x)$, а $\gamma_k = -s_k(-\varepsilon)^{n+1-k} \prod_{m=k}^{n+1} \frac{a_m}{b_m}$. Рассматриваются также приближения четных и нечетных функций, заданных разложениями в непрерывные дроби, и приводится пример. С. И. Зуховицкий

**1 В280. Проблема построения решений чебышевских задач нелинейной аппроксимации и вычислительный подход на основе некоторых обобщений гауссовского приема линеаризации.** Ремез Є. Я. Проблема побудови розв'язків чебишовських задач нелінійної апроксимації та обчислювальний підхід на основі деяких узагальнень гауссового прийому лінеаризації. «Доповіді АН УРСР», 1960, № 2, 139—143 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть $\Phi(X; z_1,\ldots,z_n)$ — непрерывная от $X$ на компакте $E$ функция, обладающая непрерывными производными первого и второго порядков по параметрам $(z_1,\ldots,z_n) \equiv z$, пробегающими открытое точечное множество $G$ эвклидова $n$-мерного пространства. Для приближенного решения нелинейной чебышевской задачи отыскания $\inf_{z\in G} \max_{X\in E} |\Phi(X; z_1,\ldots,z_n)|$ предлагается, как это делается обычно, заменить $E$ конечной $\varepsilon$-сеткой $\{X_1,\ldots,X_N\}$, что сведет задачу к чебышевскому приближению несовместной системы нелинейных уравнений $\Phi(X_i; z_1,\ldots,z_n) = 0$ $(i = 1,\ldots,N)$. Затем применяется метод Гаусса последовательной линеаризации предыдущей системы с тем лишь отличием, что получающиеся несовместные линейные системы приближаются не в смысле метода наименьших квадратов, как у Гаусса, а в чебышевском смысле каким-нибудь из известных методов. Приводится пример.

С. И. Зуховицкий

**1 В281. Численные вопросы равномерной аппроксимации (I). Об альтернансе полиномов наилучшего приближения.** Paszkowski S. Zagadnienia numeryczne aproksymacji jednostajnej. I. O alternansie wielomianów optymalnych. «Zastosow. mat.», 1958, **4**, № 1, 42—58 (польск.; рез. русск., англ.)

Изучается расположение точек ($e$-точек), в которых достигается с чередующимися знаками величина наименьшего уклонения, при приближении непрерывной на интервале $[-1,1]$ функции $\xi(t)$ алгебраическим полиномом степени не выше $n$. Как показал С. Н. Бернштейн, если $\xi^{(n+1)}(t)$ имеет постоянный знак в интервале $[-1,1]$, то полином наилучшего приближения имеет точно $n+2$ $e$-точки $u_0,\ldots,u_{n+1}$, причем $c_{nk} < u_{k+1} < c_{n,k+1}$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, $u_0 = c_{n0} = -1$, $u_{n+1} = c_{nn} = 1$, где $c_{nk} = \cos\frac{n-k}{n}\pi$, т. е. являются $e$-точками полинома Чебышева $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$. В работе даются усиления этой теоремы. Теорема 1. Пусть $\xi^{(n+1)}(t)$ и $\xi^{(n+2)}(t)$ имеют постоянный знак в $[-1,1]$. Тогда, если $\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) < 0$, то $u_k \in (c_{n,k-1}, c_{n,k})$ $(k=1,\ldots,n)$, а если

$$\xi^{(n+1)}(t)\,\xi^{(n+2)}(t) > 0, \text{ то } u_k \in (c_{n+1,k}, c_{n,k})$$
$$(k=1,\ldots,n).$$

Теорема 2. Пусть производные $\xi^{(n+1)}(t)$, $\xi^{(n+2)}(t)$ и $\xi^{(n+m)}(t)$ $(m>2)$ имеют постоянные знаки в $[-1,1]$. Тогда, если $\xi^{(n+1)}(t)\cdot\xi^{(n+2)}(t) < 0$, то $u_1 \in (c_{n+m-1,1}, c_{n+1,1})$, а если $\xi^{(n+1)}(t)\cdot\xi^{(n+2)}(t) > 0$, то $u_n \in (c_{n+1,n}, c_{n+m-1,n+m-2})$. При этом, если $\xi^{(n+1)}(t)\cdot\xi^{(n+2)}(t) < 0$, то расстояние между соседними $e$-точками не меньше чем $2\min\left\{\sin^2\frac{\pi}{2(n+m-1)}, \sin\frac{2(n+1)\pi}{2n(n+1)}\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\right\}$.

Теорема 3. Если $\xi^{(n+1)}(t)$ и $\xi^{(n+2)}(t)$ имеют постоянный знак в $[-1,1]$, то в случае $\xi^{(n+1)}(t)\cdot\xi^{(n+2)}(t) < 0$ будет $v_k \in (c_{n+1,k-1}, u_k)$ $(k=1,\ldots,n+1)$, где $v_k$ являются $e$-точками полинома наилучшего приближения степени $n+1$, если же $\xi^{(n+1)}(t)\cdot\xi^{(n+2)}(t) > 0$, то $v_k \in (u_{k-1}, c_{n+1,k})$ $(k=1,\ldots,n+1)$. С. И. Зуховицкий

**1 В282. Численные вопросы равномерной аппроксимации. II. Об оценках ошибки наилучшей аппроксимации.** Paszkowski S. Zagadnienia numeryczne aproksymacji jednostajnej. II. O szacowaniu błędu aproksymacji optymalnej. «Zastosow. mat.», 1958, **4**, № 1, 59—74 (польск.; рез. русск., англ.)

Продолжение работы автора под тем же названием (реф. 1В281). Даются оценки снизу уклонения $E_n(\xi)$ наилучшего приближения на $[-1,1]$ непрерывной функции $\xi(t)$ алгебраическим полиномом степени не выше $n$. Теорема 1. $E_n(\xi) \geqslant \frac{1}{n+1}\left|\frac{1}{2}\xi(c_{n+1,0}) - \xi(c_{n+1,1}) + \ldots + (-1)^n\xi(c_{n+1,n}) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\xi(c_{n+1,n+1})\right|$, где $c_{n+1,k} = \cos\frac{(n+1-k)\pi}{n+1}$ $(k=0,1,\ldots,n+1)$. Теорема 2. Пусть $\xi(t) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l t^l$ на интервале $[-1,1]$. Тогда $E_n(\xi) \geqslant \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} x_{n+2m+1}\right|$, где

$$a_{nm} = \frac{1}{2^{n+2m}} \sum_{0 \leqslant s < m/(n+1)} \binom{n+2m+1}{m-s(n+1)} \quad (m=0,1,\ldots).$$

Кроме того, дается оценка снизу для $E_n(\xi)$, когда $\xi(t)$ имеет вид $\sum_{l=0}^{r-1} x_l t^l + \xi_r(t)\,t^r$, где $\xi_r(t)$ — непрерывная на $[-1,1]$ функция. Доказательства теорем основаны на применении известной теоремы Валле-Пуссена об оценке снизу $E_n(\xi)$. Приводятся примеры и таблицы констант, встречающихся в оценках.

С. И. Зуховицкий

**1 В283. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса.** Рябенький В. С. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 5, 1025—1027

Рассматривается класс функций

$$f(x_1,\ldots,x_s) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty} C(m_1\ldots,m_s)\exp(2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)),$$

коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию $|C(m_1,\ldots,m_s)| \leqslant C(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-\alpha}$; здесь $\overline{m}_\nu = \max(|m_\nu|, 1)$, $\alpha > 1$. Указывается способ построения тригонометрического интерполяционного многочлена $P_N(x_1,\ldots x_s)$ по значениям $f(x_1,\ldots,x_s)$ в $N$ точках, для которого $\|P_N - f\|_{L_2} = O(N^{-(\alpha-1)/2}\ln^{(\alpha+1/2)s-1}N)$. Узлы интерполяции являются вершинами некоторой параллелепипедальной решетки.

Н. С. Бахвалов

**1 В284. Преимущества биполярных разложений при аппроксимации аналитических функций действительного переменного.** Bödewadt Uwe T. Vorteile bipolarer Entwicklungen für die Annäherung analytischer Funktionen im Reellen. «Z. angew. Math. und Mech.», 1959, **39**, № 9—11, 350—353 (нем.)

Развиваются новые применения биполярных многочленов для приближения иррациональных функций на конечном интервале. Дается критический обзор известных методов аппроксимации аналитических функций с помощью средств теории степенных рядов или полиномов наилучшего приближения Чебышева и приводятся замечания общего характера, касающиеся оценки точности приближенных формул и их сходимости. Далее исследуются вопросы аппроксимации аналитических функций, регулярных в некоторой области, с помощью биполярных рядов и устанавливаются формулы биполярного разложения вида: $f(x) = L_0 + L_1Q(x) + L_2Q^2(x) + \ldots + L_{n-1}Q^{n-1}(x) + R_n$, где $L_n(x)$ — линейная функция на интервале $(a, b)$ и $Q(x) = (x-a)(b-x)$, а $R_n(x) = Q(x)^n f_n(x)$; $f_n(x) = f^{(2n)}(\xi)/(2n)!$ и $|f_n(x)| \leqslant \max|f^{(2n)}(x)|\frac{1}{(2n)!}$. Приводятся рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов линейных функций, отнесенных к средней точке интервала, вида: $L_n(x) = m_n + p_n(x-c)$, где $m_n = k^n c_n + \sum_{i=1}^{[n/2]}(-1)^{i-1}\binom{n-i}{i}k^{2i}m_{n-i}$; $p_n = 2k^{n+1}d_n + \sum_{i=2}^{[(n+1)/2]}(-1)^{i-1}\left[\binom{n+1-i}{i} + \binom{n-i}{i-1}\right]k^{2i}p_{n-i}$ при $d = (b-a)/2$ и $k = (b-a)^{-1}$.

И. Ф. Шелихова

**1 В285. Об установлении экстремумов дискретных функций компромиссным методом.** Svoboda František. Ke etanovení extrémů diskretních funkcí kompromisní metodou. «Stroje zpracov. inform.», 1957, № 5, 49—76 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автор формулирует принцип метода, который является компромиссом между точным решением и решением методом Монте-Карло. Дело касается проблем типа линейного программирования, конструкции кодов и электрических цепей и т. п., у которых, как правило, должны выполняться добавочные условия (например, условия экономичности), определенные какой-то «оценочной функцией» (лучше было бы сказать «весовой»). Желательным является такое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, для которого оценочная функция достигает своих экстремумов. В качестве оценочной функции автор выбирает функцию $f$, обладающую свойством «почти непрерывности», определенную соотношением

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p) - f(x_1, x_2, \ldots, (x_i+1) \bmod 2, \ldots, x_p)| < k < f_{\max} - f_{\min},$$

где $x_k$ — двоичные цифры. Решение задачи ищется экспериментально: Опытным путем выбирается последовательность точек $\left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_p^{(j)}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, \ldots, k-1$; для определения $k$-й точки оцениваются предыдущие опыты, и в зависимости от изменений оценочной функции $f$ изменяются условия опыта (т. е. вероятности попадания двоичных цифр $x_k$) так, чтобы оценочная функция возрастала (или убывала); этот принцип автор называет логической обратной связью; при этом $k$-й член последовательности точек отличается от $(k-1)$-го члена только в одной координате. Грубый очерк интересного метода, основанного на интуитивных соображениях и требующий дальнейшего уточнения и углубления (именно вопросов сходимости) иллюстрирован конструкцией последовательности Постьюма (Posthume). S. Maloň

**1 В286. Полиномиальное представление паровых таблиц.** Berry W. G., Black G., Enderby J. A. Polynomial representation of steam tables. «Nature (Engl.)», 1959, **183**, № 4661, 598—599 (англ.)

Для расчетов паровых двигателей в электронную цифровую машину должны быть введены таблицы состояний пара (задающие энтропию, энтальпию и удельный объем сухого пара, как функции двух переменных — давления и температуры). Преобразованием переменных, а затем разложением в двойной ряд по полиномам Чебышева (методом Ланцоша, до 9-й степени по каждой переменной) получены аналитические выражения для этих функций. Запоминание коэффициентов требует лишь 1,5% памяти, которая была нужна для хранения первоначальных таблиц. М. Л. Бродский

**1 В287. Об аналитическом представлении эмпирических зависимостей.** Михов Ив. Върху аналитичното представяне на емпирични зависимости. «Научни тр. Висш. лесотехн. ин-т», 1959, **7**, 287—292 (болг.; рез. нем.)

Эмпирическая функция двух переменных, заданная таблицей с двумя входами, $y = \psi(x, \alpha)$ приближенно представляется в виде $y = \varphi(\alpha) f(x) + \chi(\alpha)$ путем подбора сперва функции $f(x)$ (по виду кривых $y = \psi(x, \alpha)$, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$), а затем функций $\varphi(\alpha)$ и $\chi(\alpha)$ (по их значениям при $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$). М. Л. Бродский

**1 В288. О применении астрономических методов к расчету орбит искусственных спутников.** Sconzo Pasquale. Sull'adattamento dei metodi astronomici al calcolo delle orbite dei satelliti artificiali. «Archimede», 1959, **11**, № 4, 206—217 (итал.)

Движение астероида по круговой орбите вокруг Солнца полностью определяется 4 (по эллиптической—6) параметрами, и для их определения достаточны 2 (для эллиптической — 3) наблюдения направлений с Земли на астероид в разные моменты времени. Расчетный метод, излагаемый в работе и основанный на методе Лагранжа, не зависит от закона движения Земли вокруг Солнца и был бы пригоден для аналогичного вычисления при наблюдениях за астероидом с тела, движущегося по произвольному (известному) закону. Поэтому, заменяя Солнце центром Земли, Землю — точкой на Земле, с которой ведется наблюдение (вращающейся вокруг полярной оси по известному закону), или двумя точками, а астероид — спутником Земли, имеющим круговую орбиту (сопротивление среды, распределение массы Земли и возмущения не учитываются), получаем метод определения орбиты спутника, если она круговая, по двум наблюдениям направления на спутник с Земли. Метод прост и сводится к решению трансцендентного уравнения с одним неизвестным, для чего предлагается применить обратную интерполяцию. Расчет для случая спутника облегчается благодаря наличию оценки для радиуса орбиты. В случае, если орбита спутника не является круговой, метод дает первое приближение к истинной орбите. М. Л. Бродский

**1 В289. Рационализация работы со счетной линейкой.** Simon Hans. Rationelles Arbeiten mit dem Rechenstab. «Math. und Phys. Schule», 1960, **7**, № 3, 174—179 (нем.)

Популярная статья, в которой обсуждаются вопросы, связанные с наиболее экономичным применением счетной линейки, как простого счетного прибора, при выполнении практических вычислений. Излагаются простейшие приемы, облегчающие и ускоряющие расчеты с помощью счетной линейки, пользоваться которой рекомендуется только в тех случаях, когда она дает по сравнению с другими вспомогательными средствами вычислений экономию времени. Сформулированы основные правила наиболее рационального использования шкал линейки при выполнении операций умножения, деления, извлечения корня, возведения в степень, позволяющие минимально сократить число холостых продвижений движка или бегунка. Указывается, что в настоящее время ведутся работы по созданию счетных линеек круглой формы или в виде вращающегося валика, что позволит совершенно избежать холостых обратных ходов. И. Ф. Шелихова

**1 В290. Выравнивание по данным о положении, минимизирующее ошибки в скорости.** Stoller David S. Fitting position data to minimize velocity errors. «SIAM Rev.», 1960, **2**, № 1, 31—35 (англ.)

Пусть истинное движение материальной точки описывается формулой $x = x(t) = \sum_0^N \alpha_k \varphi_k(t)$ (например, $\varphi_k(t) = t^k$). Наблюдается движение $X = X(t)$. Решается задача: подобрать коэффициенты $\alpha_k$ так, чтобы минимизировать $\int [X'(t) - x'(t)]^2 W(t)\, dt$, где $W(t)$ — вес, т. е. минимизировать (в среднем квадратичном) ошибку в измерении скорости. Решается такая же задача также для случая, когда наблюдаются значения координат лишь в отдельные моменты: $X_j = X(t_j)$; при этом интегралы заменяются суммами по некоторым квадратурным формулам. М. Л. Бродский

**1 В291. Перевод с заданной десятичной точностью десятичной дроби в двоичную систему.** Taranto Donald. Binary conversion, with fixed decimal precision. of a decimal fraction. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 7, 27 (англ.)

Даны $f$, $0 \leqslant f < 1$ и $h > 0$. Найти конечную двоичную дробь $f_b$ так, чтобы $|f - f_b| \leqslant h$. Счет ведется хорошо известным методом (см., например, Китов А. И., Криницкий Н. А., Электронные цифровые машины и программирование, М. 1959, стр. 46) до первого выполнения неравенства $2^k h \geqslant \{2^k f\}$ (где $\{\alpha\}$ — расстояние от $\alpha$ до ближайшего целого числа). Приведена схема программы. М. Л. Бродский

**1 В292. Представление экспериментальных данных в виде полиномов; применение в теории газа.** Michels A. Abels J. C. Seldam C. A. Ten, Graaff W. De.) Polynomial representation of experimental data; application to virial coefficients of gases. «Physica», 1960, **26**, № 6, 381—392 (англ.)

Применение метода наименьших квадратов для вычисления коэффициентов полиномов, представляющих эмпирические зависимости. Рассматривается математическая связь между экспериментальной неопределенностью и неопределенностью коэффициентов полиномов.

**1 В293. Метод суммирования рядов и его применение к расчету электростатического поля искрового разрядника.** Jones C. V. A method of series summation and its application to the electric force in sphere-gaps. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **C106**, № 10, 140—143 (англ.)

Суммируемый степенной ряд преобразуется в непрерывную дробь (для чего предлагается несложная вычислительная схема). Рациональными приближениями суммы ряда являются подходящие дроби полученной непрерывной дроби. Предлагается упрощенный критерий сходимости. Приведен пример (рациональная функция, разложение которой в степенный ряд совпадает с рядом для $\ln(1+x)$ до членов шестого порядка). Метод применяется для приближенного решения задачи из теории электричества, указанной в заголовке.

Х. М. Коган

**1 В294. Оценка ошибки при аппроксимации производной.** Kuntzmann J. Évaluations d'erreur dans les représentations approchées de derivées. Société d'Électroniques et d'Automatisme, Courbevoie (Seine), France, 1955, 49 pp. (mimeographed) (франц.)

**1 В295. Вычисление коэффициентов аппроксимируемых функций на вычислительном перфораторе.** Imlauf Josef. Výpočet koeficientů aproximačních funkcí používaných na děrnoštítkovém kalkulačním stroji. «Stroje zpracov. inform.», 1958, **№ 6**, 279—284 (чешск.; рез. русск., англ.)

Приводятся две интерполяционные формулы, выведенные на основании знания значений аппроксимируемой функции $f$ в точках 0, 1/4, 3/4, 1 и на основании предположения, что в этих точках интерполяционная функция отклоняется от аппроксимируемой функции поочередно на расстояние $\pm d$ ($d$ — величина, имеющая характер переменной); формулы удобны для вычислений на вычислительном перфораторе. Дело касается следующих формул:

1) $F(\nu) = a_2\nu^2 + a_1\nu + a_0$, где $a_0 = {}^1/_6(5f_0 + 2f_{1/4} - 2f_{3/4} + f_1)$, $a_1 = {}^2/_3(-5f_0 + 3f_{1/4} + 5f_{3/4} - 3f_1)$, $a_2 = {}^8/_3(f_0 - f_{1/4} - f_{3/4} + f_1)$.

Доказывается, что погрешность этого интерполяционного полинома приближенно равна погрешности интерполяционной формулы Чебышева второй степени.

2) $F(\nu) = (a_1\nu + a_0)/(b_1\nu + b_0)$, где $a_0 = -7f_0f_{1/4} - 9f_0f_{3/4} + 16f_0f_1 - 8f_{1/4}f_{3/4} + 9f_{1/4}f_1 - f_{3/4}f_1$, $a_1 = 8(f_0f_{1/4} - 4f_0f_1 - 2f_{1/4}f_{3/4} + f_{3/4}f_1)$, $b_0 = 6(-f_{1/4} - 3f_{3/4} + 4f_1)$, $b_1 = 24(-f_0 + f_{1/4} + f_{3/4} - f_1)$.

Простые, с точки зрения вычисления, коэффициенты последней формулы выведены под проблематично упрощающим предположением $b_0d \approx (0{,}25b_1 + b_0)d \approx (0{,}75b_1 + b_0)d \approx (b_1 + b_0)d = \delta$. Погрешность этой формулы не приведена; автор рекомендует опытную оценку. Вторая формула удобна для аппроксимации заданной функции в окрестности особых точек.

S. Maloň

**1 В296. Об ошибках, возникающих от неточности осей и градуировки кругов в инструментах, измеряющих углы.** Taya Torao. On the errors due to incorrectness of axes and graduated circle in the angle measuring instruments. «Добоку гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Civil Engrs», 1959, № 65, 43—55 (японск.; рез. англ.)

Проведено аналитическое исследование ошибок, возникающих от неточности в положении осей и градуировки круговых шкал в приборах, измеряющих углы (в частности, теодолитах).

В. К. Саульев

**1 В297. Круговая номограмма для операций с комплексными числами.** Морита Кацухико, Симокава Якити. «Кагаку, Kagaku», 1960, **30**, № 4, 207—208 (японск.)

**1 В298. Номограммы для распределений биномиального и Пуассона.** Johnson Eric E. Nomograph for binomial and Poisson significance tests. «Industr. Qual. Control», 1959, **15**, № 9, 22, 24 (англ.)

Для ускорения вычислений, связанных с применением указанных распределений, предлагаются элементарные номограммы из выравненных точек.

Г. Е. Джемс-Леви

**1 В299. Номографируемые функции.** Warmus M. Nomographic functions. «Rozpr. mat.», 1959, **16**, 151 s. (англ.)

**1 В300. Номограмма для расчета частного коэффициента корреляции.** Ward Denis H. A nomogram for calculating partial correlation coefficients. «Incorp. Statist.», 1959, **9**, № 4, 139—141 (англ.)

Приведена номограмма функции $r_p = r\operatorname{cosec}\Theta\operatorname{cosec}\varphi - \operatorname{ctg}\Theta\cdot\operatorname{ctg}\varphi$. Предварительно это уравнение преобразовано к виду, содержащему уравнение Copo. Получена номограмма из выравненных точек с бинарным полем.

Х. М. Коган

**1 В301. Локальное номографирование без перегородировок.** Сморкачев Е. Т. «Докл. АН СССР», 1959, **129**, № 3, 515—518

Рассматривается построение определителя Массо для уравнения $z = F(x, y)$ с точностью до бесконечномалых 6-го порядка. Решение находится в эффективной форме. Даются готовые формулы для коэффициентов разложения элементов определителя в ряды.

Г. Е. Джемс-Леви

**1 В302. Номограммы для решения уравнений четвертой степени.** Vurcfeld Jaromír. Nomogram pro řešení rovnic čtvrtého stupně. «Aplikace mat.», 1958, **3**, № 3, 223—232 (чешск.; рез. русск., нем.)

Для уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, разделенного посредством введения вспомогательного переменного на две части, строятся две сетчатые номограммы, совмещенные на чертеже. Корни находятся подбором, с помощью особых свойств полученной номограммы.

Г. Е. Джемс-Леви

**1 В303. Номография как научно-экономическое пособие в инженерной практике.** Fischer J. Nomographie als wissenschaftlich-ökonomisches Hilfsmittel für die Ingenieurpraxis. «Technik», 1959, **14**, № 12, 779—785 (нем.)

Популярное изложение некоторых номографических методов. Назначением статьи является ознакомление широкого круга инженерно-технических работников с целями и возможностями номографии. Библ. 55 назв.

Г. Е. Джемс-Леви

**1 В304 К. Диаграммы, абаки, номограммы.** Iorga M., Marinescu A., Andrian A. Diagrame, abace, nomograme. Bucureşti, Ed. tehn., 1959, 279 p., il., 14 lei. «Bibliogr. RPR», 1960, **9**, № 1, 6 (рум.)

**1 В305. Считающие чертежи (номограммы). 2-е изд.** Пентковский М. В. М., Физматгиз, 1959, 151 стр., илл., 2 р. 20 к.

Элементарное изложение основных понятий номографии с многочисленными примерами, предназначенное для учеников старших классов средней школы.

**1 В306 К. Новый общий метод вычисления интегралов. Теоретическое и практическое пособие для математиков, физиков и инженеров.** Van Laethem Marcel. Une méthode nouvelle et générale de calcul des intégrales généralisées. Théorie et pratique à l'usage des mathématiciens, physiciens et ingénieurs. Ed. Nauwelaerts, Louvain, 1956. viii+180 pp. (3 plates) 250 Bfr. (франц.)

Основной вопрос, рассмотренный в книге, касается вычисления неопределенного интеграла типа $\psi = \int_b^x y\,dx$, $y = (x-b)^n f(x)$, $f(b) \neq 0$, $f(x)$ — непрерывная функция, $n > -1$. Подробно исследован случай $n = -{}^1/_2$. При этом предполагается, что $x$ раскладывается по степеням $\psi$; коэффициенты этого разложения можно вычислить при помощи функции $y'y^{-3}$ и ее производных.

Из Math. Revs, 1958, **19**, № 1, 64.

**1 В307 К. Численные методы. 1.** Langhammer Rudolf. Numerické metody. 1. Praha, SNTL, 1959, 201 s., 20,30 Kčs. «Bibliogr. katal. ČSR. České knihy», 1959, № 51, 1209 (чешск.)

**1 В308 К. Методы вычислений. [Учебн. пособие для вузов]. Т. I.** Березин И. С., Жидков Н. П. М., Физматгиз, 1959, 464 стр., илл., 11 р.

Развитие вычислительной техники за последние полтора десятилетия вызвало усиленный интерес к вычислительной математике. Хотя имеется ряд руководств, в которых хорошо представлены численные методы по отдельным вопросам прикладного анализа, однако до сих пор не имелось руководства, в котором были бы изложены совокупно хотя бы основные методы численного решения важнейших математических задач. Этот пробел призван восполнить двухтомный курс методов вычисления, в котором авторы с возможной математической строгостью излагают сложившиеся в настоящее время численные методы решения задач. В учебном пособии нашли отражение многочисленные исследования последних лет, изложенные ранее в журнальной литературе и монографиях. Бросается в глаза стремление авторов к изложению материала методов вычислений с идейных позиций функционального анализа. Том I состоит из введения и 5 глав. Введение содержит определение предмета и метода вычислительной математики, а также краткую характеристику современных вычислительных средств. В гл. 1 «Действия с приближенными числами» указаны источники погрешности результатов вычислений, задачи, возникающие при работе с приближенными числами, правила округления чисел и содержится анализ погрешностей вычислений — погрешности округления, неустранимой погрешности и погрешности метода. Дано понятие о статистических методах оценки погрешности, об ошибках, возникающих при измерении физических величин, о среднеквадратической погрешности и обработке результатов измерений по методу наименьших квадратов. В гл. 2 «Теория интерполирования и некоторые ее приложения» после общей постановки задачи интерполирования и некоторых предварительных определений авторы рассматривают способы построения интерполирующих функций, дают оценки точности приближения с их помощью и некоторые приложения теории интерполирования. Дается построение интерполяционного многочлена Лагранжа, интерполяционной схемы Эйткена, интерполяционной формулы Ньютона для неравных и равных промежутков, интерполяционных формул, использующих центральные разности (Гаусса, Стирлинга, Бесселя и Эверетта). Для всех этих формул выводятся остаточные члены и оценки их. Указаны некоторые другие способы получения интерполяционных формул, как диаграмма Фрезера и операторный метод. Обсуждается вопрос о сходимости интерполяционного процесса, а также интерполирование периодических функций. Приведены формулы интерполирования в том случае, когда в узлах заданы значения функции и ее производных (многочлен Эрмита и обобщенная формула Ньютона), выведены остаточные члены и оценки их. Кратко рассмотрена задача об интерполировании функций многих независимых переменных и функций комплексного переменного. В заключение дано приложение интерполирования к составлению таблиц функций (субтабулирование) и обратное интерполирование. В гл. 3 «Численное дифференцирование и интегрирование» изложены численные методы дифференцирования и интегрирования функций. Даны формулы численного дифференцирования для неравноотстоящих и равноотстоящих узлов, основанные на интерполировании с помощью алгебраических многочленов. Приведены и безразностные формулы численного дифференцирования. Численное интегрирование представлено формулами Ньютона — Котеса, трапеций, Симпсона, Гаусса, Эрмита, А. А. Маркова, Чебышева. Для всех этих формул исследуются остаточные члены. В связи с формулой Эйлера изучаются числа и многочлены Бернулли. Из формул, содержащих разности подынтегральной функции, приведены формулы Грегори, Лапласа и другие, получаемые путем использования интерполяционных формул Бесселя, Стирлинга. Имеются некоторые указания относительно применения формул численного интегрирования, изложен метод Рунге приближенной оценки погрешности численного интегрирования. Рассмотрено вычисление несобственных интегралов, подынтегральная функция которых обращается в бесконечность внутри отрезка интегрирования. Приведено два метода выделения особенностей — мультипликативный и аддитивный, а также специальные приемы, позволяющие учитывать особенность. В заключение обсуждается вопрос приближенного вычисления кратных интегралов методами повторного применения квадратурных формул, замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Л. А. Люстерника и В. А. Диткина и Монте-Карло. Гл. 4 «Равномерные приближения» посвящена подробному изложению вопросов равномерного приближения в пространстве $C$ непрерывных функций. После краткого изложения наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах авторы рассматривают наилучшее равномерное приближение непрерывных функций обобщенными многочленами, в частности алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Исследуется вопрос о порядке стремления к нулю наименьшего отклонения функции от алгебраического или тригонометрического многочлена наилучшего приближения при $n\to\infty$. В заключение дано два приема приближенного построения алгебраических многочленов наилучшего приближения. Гл. 5 «Среднеквадратичные приближения» посвящена приближению функций некоторого класса $R$ функциями из более узкого класса $\overline{R}$, но за меру близости на $[a, b]$ принимается величина среднеквадратичного отклонения с весом $p(x)\geqslant 0$. Как и в гл. 4, авторы рассматривают сначала общую задачу приближения в гильбертовом пространстве, а потом — среднеквадратичные приближения функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Подробно рассмотрены ортогональные системы многочленов Якоби, Лежандра, Чебышева первого и второго рода, Лагерра и Эрмита. Отдельно обсуждаются некоторые вопросы сходимости рядов по ортогональным системам многочленов. Рассматриваются вопросы приближения функций, заданных таблицей, обобщенными многочленами, в частности алгебраическими и тригонометрическими, по методу наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов применяется для сглаживания результатов наблюдения и к построению эмпирических формул. Все изложение иллюстрировано простыми подробно разобранными примерами. В конце каждой главы приведены упражнения и указана библиография.

Н. Я. Лященко

**1 В309 К. Методы вычислений. [Учебн. пособие для вузов]. Т. 2.** Березин И. С., Жидков Н. П. М., Физматгиз, 1959, 620 стр., илл., 14 р. 10 к.

Том 1 см. реф. 1В308К. Том 2 состоит из 5 глав и посвящен численному решению алгебраических, трансцендентных, дифференциальных и интегральных уравнений. В гл. 6 «Решение систем линейных алгебраических уравнений» подробно описаны различные схемы метода исключения (схема Гаусса с выборкой главного элемента, компактная схема Гаусса, схема Жордана, схема без обратного хода), методы квадратного корня, ортогонализации, сопряженных градиентов и разбиения на клетки. Методам последовательных приближений предпослано изучение некоторых свойств линейных операторов, их связи с матрицами, сходимости последовательностей матриц и матричных рядов. Из методов последовательных приближений рассмотрены линейные полношаговые методы первого порядка (простая итерация Ричардсона) и линейные одношаговые методы первого порядка (Зейделя, релаксационный), а также метод наискорейшего спуска. Гл. 7 «Численные методы решения алгебраических уравнений высших степеней и трансцендентных уравнений» посвящена численному решению уравнений вида $f(z)=0$, где $f(z)$ — заданная функция действи-

тельного или комплексного переменного. Рассматриваются две задачи: отделение корней уравнения и вычисления их с заданной точностью. Для алгебраического уравнения изучаются границы расположения корней, правило Декарта оценки числа действительных корней, теорема Штурма для определения точного числа действительных корней в данном промежутке, метод Фурье отделения действительных корней, отделение комплексных корней и нахождение корней по методу Лобачевского в случае различных по абсолютной величине действительных корней, комплексных корней, близких или равных корней. Обсуждается вопрос о погрешности метода Лобачевского и дается видоизменение Лемера. Из итерационных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений и систем приведены метод секущих, Ньютона, различные методы построения итераций высших порядков (Чебышева, Эйткена, с помощью теоремы Кенига), метод наискорейшего спуска. В конце рассмотрено отыскание корней алгебраических уравнений методом выделения множителей (методы Лина, Фридмана, Хичкока). В гл. 8 «Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц» изложены методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц (А. Н. Крылова, Ланцоша, Данилевского, Леверрье и усовершенствование его Д. К. Фаддеевым, Самуэльсона, окаймления, эскалаторный, интерполяционный и итерационные), методы определения границ собственных значений без знания явного вида характеристического многочлена. Из методов ускорения сходимости итерационных процессов приведены методы М. К. Гавурина, Л. А. Люстерника, δ-процесс Эйткена. Обсуждается вопрос неустранимой погрешности при численном решении систем линейных алгебраических уравнений. В гл. 9 «Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений» рассматриваются методы численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Аналитические приближенные методы представлены методом С. А. Чаплыгина и некоторыми его модификациями, методом малого параметра. Из численных методов описаны метод Рунге-Кутта и разностные методы (экстраполяционная и интерполяционная формула Адамса, формула Штёрмера). Дается оценка погрешности, сходимость и устойчивость разностных методов решения обыкновенных уравнений. Из методов решения краевых задач приведены метод конечных разностей, метод прогонки и вариационные методы. Гл. 10 «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений» посвящена численным методам решения задач математической физики, причем рассмотрение ограничивается линейными уравнениями 2-го порядка с двумя неизвестными и линейными интегральными уравнениями одного переменного. Наибольшее внимание уделено методу сеток решения краевых задач для уравнений эллиптического типа, задачи Коши и смешанной задачи для уравнений гиперболического и параболического типов; приведена оценка погрешности и сходимость метода. Для уравнений гиперболического типа излагается численное решение по методу характеристик. Описаны методы решения краевых задач: прогонки, прямых, вариационные (Ритца, Канторовича, Куранта, Треффтца), Галеркина. Обсуждается вопрос сходимости и устойчивости разностных схем. Численное решение линейных интегральных уравнений представлено методами замены интеграла конечной суммой и замены ядра на вырожденное, методами моментов, наименьших квадратов и последовательных приближений. Все изложение иллюстрировано подробно разбираемыми примерами. В конце каждой главы приведены упражнения и библиография. Н. Я. Лященко

**1 В310 К. Курс математических вычислений** (Цзисуань фанфа цзяни). Пекин, Кэсюэ чубаньшэ, 1958, VI, 266 стр., илл., 1, 30 ю. (кит.)

Книга представляет собой краткий справочник по вычислительной математике. Здесь, в частности, рассмотрены следующие вопросы: 1) Разложение функций в степенные ряды (ряды Тейлора). 2) Интерполирование (формула Лагранжа, тригонометрическое интерполирование). Разделенные разности. Формулы Ньютона, Стирлинга, Бесселя и Эверетта. 3) Метод наименьших квадратов. 4) Численное интегрирование. Формула трапеций. Формула Симпсона. Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева. Вычисление кратных и несобственных интегралов. 5) Решение алгебраических уравнений. Схема Горнера. Метод Ньютона и метод хорд. Решение систем алгебраических и трансцендентных уравнений. Метод Лобачевского. 6) Линейная алгебра (матричные операции, согласованные нормы векторов и матриц и пр.). Решение систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей методом исключения Гаусса и итерационным методом Зейделя. 7) Нахождение собственных значений и собственных векторов матриц (метод Данилевского, метод Крылова, итерационные методы, включая $\delta^2$-процесс). 8) Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (экстраполяционные разностные методы, методы типа Рунге-Кутта, разложение решения в ряд и пр.) Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование устойчивости. Метод конечных разностей. Решение методом «пристрелки». 9) Решение дифференциальных уравнений с частными производными. Метод конечных разностей (рассматриваются отдельно уравнения параболического, эллиптического и гиперболического типов). Бигармоническое уравнение и задача на собственные значения. Метод характеристик. 10) Методы решения систем эллиптических сеточных уравнений. Методы Либмана и Ричардсона. Линейная экстраполяция по Коллатцу граничных значений. Экстраполяция «на нулевой шаг» сеточного решения. Общее краевое условие. Изложение сопровождается числовыми примерами. В. К. Саульев

## ТАБЛИЦЫ

**1 В311. Таблица «интегралов тяжелых ядер»**

$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^p}{x^{q+1}(x+x_0)^r}\,dx$ **для центральных потенциалов.**

Laurikainen K. V. A table of «hard core integrals»

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^p}{x^{q+1}(x+x_0)^r}\,dx$$

for central potentials, «Turun yliopiston julkaisuja», 1959, Sar. AI, № 32, 46 pp., il.) (англ.)

Уравнение Шрёдингера

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\left[k^2+\frac{l(l+1)}{x^2}-b\nu(x)\right]\varphi=0,$$

где $\nu(x)=\begin{cases}\infty, & x\leqslant x_0\\ \dfrac{e^{-\mu x}}{(\mu x)^n}, & x>x_0\end{cases}$ ($n$ — целое) $\varphi(x_0)=$ $=\varphi(\infty)=0$, $\varphi(x)\equiv 0$ $(0\leqslant x\leqslant x_0)$, решается вариационным методом Ритца. Получающиеся при этом интегралы

$$I=\int_0^\infty\left\{\varphi'^2+\left[k^2+\frac{l(l+1)}{x^2}\right]\varphi^2\right\}dx,$$

$$N=\int_0^\infty\frac{e^{-\mu x}}{\mu x}\varphi^2 dx$$

можно записать в виде

$$I = \sum_{i,j=0}^{n} c_{i,j}\, h_i h_j,\ N = \sum_{i,j=0}^{n} d_{i,j} h_i h_j,$$

где коэффициенты $c_{i,j}$ и $d_{i,j}$ выражаются через интегралы

$$F(p, q, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{(1 - e^{-x})^p}{x^{q+1}}\, dx,$$

$$F_{x_0}(p, q, r, \alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(1 - e^{-x})^p}{x^{q+1}(x + x_0)^r}\, dx.$$

Например, при $l = 0$ $c_{i,j} = ijF(2, -1, 2k + i + j) + (2k+1)F(1, -1, 2k + i + j + 1)$, $d_{i,j} = \frac{e^{-\mu x_0}}{\mu} \times F_{x_0}(2, -1, 1, 2k + i + j + \mu)$. Функция $F(p, q, \alpha)$ протабулирована в работе (РЖМат, 1960, 12227). В данной работе приведены восьмизначные таблицы функции $F_{x_0}(p, q, r, \alpha)$ для $x_0 = 0{,}25\,(0{,}05)\,0{,}45$; $r = 1\,(1)\,2$; $p = 2\,(1)\,6$; $q = -1\,(1)\,3$; $\alpha_0 = 0{,}1\ (0{,}1)\,12{,}0$. Таблицы вычислены на счетной машине ИБМ-704, находящейся в Европейском институте научных вычислений, в режиме с плавающей запятой. Правильность последнего знака не гарантируется. В. К. Саульев

**1 В312. Таблицы функций с интерполяцией второй степени при помощи счетно-цифровой машины.** Marek Jindřich M. Tabulky funkcí s interpolací 2. stupně kalkulačním strojem. «Stroje zpracov. inform.», 1958, № 6, 267—277 (чешск.; рез. русск., англ.)

Исследуется вопрос составления таблиц, в которых вместо разностей фигурируют коэффициенты интерполяционного полинома; это упрощает вычисления при помощи счетно-цифровой машины. Разбирается вопрос удобного интерполяционного полинома с точки зрения экономии времени, потребного для вычисления значений функции, и с точки зрения точности приближения. Предполагается так называемая модифицированная формула Бесселя второй степени

$$y_{k+m} \approx y_k + n\delta_{k+1/2} + {}^1/_2 n(n-1)\left[\left(\delta^2_{k+1/2}\right) - {}^3/_{16}\left(\delta^4_{k+1/2}\right)\right],$$

где $\delta_{k+1/2} = \Delta_k = y_{k+1} - y_k$, $\left(\delta^2_{k+1/2}\right) = {}^1/_2\left(\Delta^2_{k-1} + \Delta^2_k\right)$, $\left(\delta^4_{k+1/2}\right) = {}^1/_2\left(\Delta^4_{k-2} + \Delta^4_{k-1}\right)$, коэффициенты которой можно хорошо вычислять на вычислительном перфораторе. Вывод формулы основан на результатах более ранней статьи автора (РЖМат, 1956, 9117). S. Maloň

**1 В313. Табулирование трех функций, встречающихся в теории ядерных резонансов.** Cook J. L., Elliott D. The tabulation of three functions arising in nuclear resonance theory. «Austral. J. Appl. Sci.», 1960, 11, № 1, 16—32 (англ.)

Приведены с пятью десятичными знаками таблицы функций

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + y^2} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] dy,$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1 + y^2} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] dy$$

для $\zeta = \frac{x}{1+x} = 0\,(0{,}05)\,1$, $t = 0{,}25\,(0{,}05)\,1{,}00\,(0{,}10)\,2{,}00$ и $\Psi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^n(x, t)\, dx$ для $n = 1\,(1)\,10$, $t = 0\,(0{,}025)\,0{,}2\,(0{,}05)\,1{,}0\,(0{,}1)\,2$. В. К. Саульев

**1 В314. Таблицы присоединенных функций Лежандра. Т. 1 и т. II.** Robin P. Tables numériques des fonctions associées de Legendre. Fonction associée re première espèce $P_n^m(\cos \upsilon)$. Paris, ed. «Rev. optique». Fasc. I. 1952, 292 p. Fasc. 2. 1959, XII, 640 p. (франц.)

В книге, состоящей из двух томов, приводятся таблицы присоединенных функций Лежандра $P_n^m(\cos \upsilon)$. В первом томе даны таблицы для $n = -0{,}5\,(0{,}1)\,10$, $m = 0(1)5$, $\upsilon = 0°(1°)90°$; во втором — для $n = -0{,}5(0{,}1)10$, $m = 0\,(1)\,2$, $\upsilon = 0°\,(1°)\,180°$. Табличные значения приведены с 7—9 десятичными знаками. Ошибка не превосходит единицы последнего десятичного знака. Для интерполяции даны таблицы центральных разностей второго и четвертого порядков. П. И. Кузнецов

**1 В315. Таблица факторизации чисел $2N^2+1$ для $500 < N \leqslant 1000$.** Gloden A. Table de factorisation des nombres $2N^2+1$ pour $500 < N \leqslant 1000$. 2-ème éd. Published by the author, Luxembourg, 1957, 6 pp. (polycopiées) (франц.)

**1 В316 К. Четырехзначные физико-математические таблицы.** Wojtowicz Władysław. Tablice matematyczno-fizyczne czterocyfrowe. Warszawa, Państw. Zakł. Wydawn. Szkoln., 1960 (1959), 84 s., il., 8.50zł. «Przew. bibliogr.», 1959, **15**, № 49, 675 (польск.)

**1 В317 К. Таблицы для преобразования с помощью счетной машины двух 3°-х гауссовых координатных систем на эллипсоид Ф. Н. Красовского по формулам В. К. Христова для всех широт.** Христов Владимир К. Таблици за трансформация със сметачна машина между две 3°-ови Гаусови координатни системи върху елипсоида на Ф. Н. Красовски по формулите на В. К. Христов за всички широчини. (Тр. центр. лабор. геод.. Отд. матем., физ. и техн. науки. БАН, № 5). София, 1959, 224 с., 27.45 лв.). «Българ. книгопис, 1960, **64**, № 1, 8 (болг.; русск. и нем.)

**1 В318 К. Новые числовые таблицы функций обычного анализа.** Flavien L. Nouvelles tables numériques pour les fonctions usuelles de l'analyse. Paris, Gauthier-Villars, 1958, 63 p. (франц.)

Приведены таблицы $n^2$, $n^3$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$ для 1(1)1000; $\ln n$, $\lg n$, $n = 1(1)1000$; $10^x$, $x = 0(0{,}01)1$; небольшая таблица тригонометрических функций и таблица перехода от градусов к радианам и обратно. В. К. Саульев

**1 В319 К. Таблицы натуральных логарифмов. Т. 2. Логарифмы чисел от 5 до 10.** Обработка таблиц и перев. с англ. Барк Л. С. М., Вычисл. центр АН СССР, 1960, 507 стр., илл., 25 р. 40 к.

Шестнадцатизначные таблицы натуральных логарифмов для $x = 5\,(0{,}0001)\,10$. Кроме того, имеются следующие небольшие таблицы: 1) $\ln x$, $x = 2\,(1)\,10$, с 40 десятичными знаками, 2) $\ln(1 + x)$, $\ln(1 - x)$, $x = k \cdot 10^{-n}$, $k = 1\,(1)\,9$; $n = 1\,(1)\,13$ с 25 десятичными знаками. Таблицы отпечатаны на ротапринтах.

**1 В320 К. Таблицы функций Вебера. Т. 1.** Киреева И. Е., Карпов К. А. М., Вычисл. центр АН СССР, 1959, 341 стр., илл., 37 руб.

Протабулирована с шестью десятичными знаками функция Вебера $D_p[x(1 + i)] = u_p(x) + iv_p(x)$. являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 D_p(z)}{dz^2} + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) D_p(z) = 0, \qquad (1)$$

для $p = 0\,(0{,}1)\,1{,}5$, $\pm x = 0\,(0{,}01)\,0{,}50$; $p = 1{,}6\,(0{,}1)\,2$, $\pm x = 0\,(0{,}01)\,0{,}51$. «Ошибка в табличных значениях функций не превосходит 0,6 единицы пятого десятичного знака для $7{,}50 \leqslant |x| \leqslant 10$ и $1{,}80 \leqslant p \leqslant 2$ и 0,6 единицы шестого десятичного знака для всех осталь-

ых значений $x$ и $p$». Таблицы значений $u_p(x)$ и $v_p(x)$ вычислены на машине «Стрела» по асимптотическим рядам (где позволяет точность) и при помощи кусочной аппроксимации решения уравнения (1) полиномами по $z$. Для интерполяции промежуточных значений предлагается использовать формулу Лагранжа с тремя-восемью точками. Имеется краткое описание основных свойств функций Вебера. Приведены правила пользования таблицами с семью иллюстрирующими примерами. Библ. 13 назв. В. К. Саульев

**1 В321 К. Таблица нецентрального t-распределения: функция плотности, интегральная функция распределения и процентные точки.** Resnikoff George J., Lieberman Gerald. J. Tables of the non-central $t$-distribution: density function, cumulative distribution function and percentage points. Stanford studies in mathematics and statistics. I, Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1957, ix+389 pp., $ 12.50 (англ.).

Приведены таблицы плотности вероятностей, интегральной плотности и $t=(z+\delta)/\omega^{1/2}$. Здесь $\delta=(f+1)^{1/2}K_p$, где $K_p$ таково, что $\Pr(z>K_p)=1-p$. Аргумент $t/f^{1/2}$ изменяется с шагом 0,05; $f=2\,(1)\,24\,(5)\,49$; $p$=0,2500; 0,1500; 0,1000; 0,0650; 0,0400; 0,0250; 0,0100; 0,0040; 0,0025; 0,0010.

Из Math. Revs, 1958, **19**, № 2, 187.

**1 В322 К. Таблицы Королевского математического общества. Том 7. Функции Бесселя. Часть III. Нули и присоединенные значения.** Ed. Olver F. W. J. Royal Society mathematical tables. Vol. 7. Bessel functions. Part III. Zeros and associated values. Cambridge, Univ. Press, 1960, LX: 79 pp. (англ.)

Основную часть книги составляют восьмизначные таблицы: 1) нулей $j_{n,s}$ функции Бесселя первого рода $J_n(x)$, нулей $y_{n,s}$ функции Бесселя второго рода $Y_n(x)$ и значений $J_n'(j_{n,s})$, $Y_n'(y_{n,s})$; 2) нулей $j'_{n,s}$ функции $J_n'(x)$, нулей $y'_{n,s}$ функции $Y_n'(x)$ и значений $J_n(j'_{n,s})$, $Y_n(y'_{n,s})$, $n=0\,(0{,}5)\,20{,}5$, $s=1\,(1)\,50$; 3) нулей $a'_{m,s}$, $b'_{m,s}$ производных $j'_m(x)$, $y'_m(x)$ сферических функций Бесселя $j_m(x)=\sqrt{(\pi/2x)}\,J_{m+1/2}(x)$, $y_m(x)=\sqrt{(\pi/2x)}\,Y_{m+1/2}(x)$ и значений $j_m(a'_{m,s})$, $y_m(b'_{m,s})$; $m=0\,(1)\,20$, $s=1\,(1)\,50$. При этом ошибки в табличных значениях не превосходят 0,55 единицы восьмого знака. Для случаев больших $n$ предлагается использовать асимптотические ряды $j_{n,s}\sim nz+\frac{p_1}{n}+\frac{p_2}{n^3}+\ldots$;

$$J_n'(j_{n,s})\sim-\frac{2}{n^{2/3}}\frac{\mathrm{Ai}'(a_s)}{z\varphi}\left(1+\frac{P_1}{n^2}+\frac{P_2}{n^4}+\ldots\right);$$

$$j'_{n,s}\sim nz+\frac{q_1}{n}+\frac{q_2}{n^3}+\ldots;$$

$$J_n'(j_{n,s})\sim\frac{\mathrm{Ai}(a'_s)}{n^{1/3}}\varphi\left(1+\frac{Q_1}{n^2}+\frac{Q_2}{n^4}+\ldots\right);$$

$$a'_{m,s}\sim nz+\frac{t_1}{n}+\frac{t_2}{n^3}+\ldots;$$

$$j_m(a'_{m,s})\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Ai}(a'_s)}{n^{5/6}}\frac{\varphi}{\sqrt{z}}\left(1+\frac{T_1}{n^2}+\frac{T_2}{n^4}+\ldots\right),$$

в которых величины $z$, $\varphi$, $p_r$, $P_r$, $q_r$, $Q_r$ и $T_r$ протабулированы как функции аргумента $\xi$ и $m=n-1/2$ (в (1), (2) $\xi=n^{-2/3}a_s$, в (3), (4) $\xi=n^{-2/3}a'_s$) для $r=1, 2, 3$, $-\xi$=0,0(0,1)7,5 и $(-\xi)^{-1/2}$=0,00(0,02)0,38. Кроме того, приведены с восемью знаками нули и значения функций $a_s$, $\mathrm{Ai}'(a_s)$, $a'_s$, $\mathrm{Ai}(a'_s)$, $b_s$, $\mathrm{Bi}'(b_s)$, $b'_s$, $\mathrm{Bi}(b'_s)$ для $s=1\,(1)\,50$. Сами таблицы занимают примерно две трети объема книги. В остальной части книги имеется подробное описание таблиц (способ их вычисления на машине ДЭЮКЕ, вопросы контроля, интерполяция, сравнение с другими таблицами и пр.) и необходимые теоретические сведения. В. К. Саульев

**См. также:** 1А361, 1А389, 1А500, 1Б335, 1Б338.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

**1 В323. Коды с изменением в одном разряде.** Valach Miroslav. Kody se změnou v jednom řádu. «Stroje zpracov. inform.», 1957, № 5, 39—47 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описываются коды «$S$», названные автором кодами с изменением в одном разряде (их соседние сигналы отличаются одной составляющей), построение этих кодов и их преобразование. Рассмотрены коды с дополнениями в низших разрядах — коды «$N$» (обычный двоичный код, десятичный код Рубинова, десятичный «код+3»). Даны правила, использование которых позволяет строить преобразователи кодов «$N$» в коды «$S$» и наоборот. Приведены примеры преобразований. В. Л. Евтеев

**1 В324. Комбинированная сортировка.** Nagler H. Amphisbaenie sorting. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1959, **6**, № 4, 459—468 (англ.)

Дается метод сортировки данных на электронной цифровой вычислительной машине с одновременным использованием $p+1$ устройств на магнитной ленте, позволяющий построить последовательность целых $\alpha$-разрядных $p$-ичных чисел $0\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\ldots k_i\leqslant\ldots\leqslant k_{\max}$. В качестве примера рассмотрена задача сортировки четырехразрядных пятеричных чисел. Приводится оценка времени, необходимого для решения задач такого типа. Рассматриваются методы определения значащих цифр чисел, когда информация определена в $p$-ичной системе счисления, а вычислительная машина работает по $q$-ичной системе, где $q$ обычно 2 или 10. Затронуты вопросы выбора наилучшей программы внутренней сортировки, при использовании только быстродействующего запоминающего устройства, при условии, если частота чисел $n/p^{\alpha-r}$ больше или меньше 1; здесь $n$ — количество чисел в группе, $r$ — номер значащей цифры. Указывается на возможность применения метода в случае буквенной информации. Г. И. Гришаков

**1 В325. Практическое применение и программирование для электронных вычислительных машин.** Bobillier Pierre-André. Utilisation pratique et programmation des ordinateurs. «Automatisme», 1959, **4**, № 6, 213—219 (франц.)

Статья обзорного характера. Рассматривается вопрос оптимального использования электронных вычислительных машин. Анализируются отдельные этапы решения задач на вычислительных машинах и указываются пути повышения степени эксплуатации машин на каждом этапе. Основное внимание уделяется программированию

Отмечается длительность процесса программирования, возможность появления ошибок, сделанных программистом, необходимость использования машин только для получения нужных результатов. Процесс ускорения и улучшения программирования заключается в разработке методов автоматического программмирования. Кратко рассматриваются интерпретирующая система FLAIR (для машины ИБМ-650) и компилирующая — PASO, а также система ФОРТРАН (для машины ИБМ-704).

Н. Н. Поснов

**1 В326. Новый метод кодирования программы для вычислительной машины** —. Computers to «talk» English, algebra, and logic. «Electr. Engng», 1959, **78**, № 10, 1069 (англ.)

Сообщение фирмы «ИБМ» о разработке нового «языка» (Commercial Translator) для облегчения связи человека и электронной вычислительной машины. Средняя программа для вычислительной машины содержит 10 000 команд и требует 3 ÷ 5 человеко-лет для составления. Эта же программа в терминах нового языка может быть написана одним человеком за полгода. Значительно облегчается контроль правильности и отладка программы на машине.

М. Д. Хахин

**1 В327. Упрощенное программирование.** Morton J. P. Simplified computer programming. «Hawker Siddeley Techn. J.», 1959, **1**, № 3, 16—23 (англ.)

Изложена методика составления программы английской фирмы «A. V. Roe & Co.» для цифровой машины, установленной на одном из предприятий. Машина имеет ограниченное запоминающее устройство. Приводится перечень команд, выполняемых машиной. Вычисление тригонометрических функций, нахождение логарифма числа и извлечения корня включены в основные операции. Подробно разъясняется смысл операции «переход» и «модификация команд». Программа трехадресная. Характерная особенность расположения материала в команде в том, что число разрядов «признаков» значительно увеличено (в примерах число разрядов признаков равно числу разрядов в адресе). Кроме того, в коде команды существуют специальные разряды, используемые для цепей контроля и исправления ошибок путем повторения вычисления участков программы.

М. Д. Хахин

**1 В328. О программировании и его автоматизации.** Pösch H. Über Programmierung und ihre Automation. «Z. angew. Math. und Mech.», 1959, **39**, № 9-11, 385—388 (нем.)

Производится общее рассмотрение процесса программирования. Рассматривается метод библиотечных подпрограмм. Кратко описываются методы автоматического программирования, применяемые на машинах УНИВАК («обобщенное программирование» — «generalized programming»), Z-22, и метод, разрабатываемый для машины «Сименс-2002» (реф. 1 В346, 1 В347). Во всех этих методах специальная компилирующая программа объединяет библиотечные программы, составленные в условных адресах, в основную программу. В системе автоматического программирования, создаваемой для машины «Сименс-2002», могут быть использованы также интертретирующие программы.

И. Б. Рохлина

**1 В329. Автоматическое программирование для электронных вычислительных машин.** Тюринг Б. (Thüring B.), «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1958, **2**, № 3, 159—163

См. РЖМат, 1960, 4639.

**1 В330. Цифровая машина в столе**—. Computer in a desk. «Automat. Control», 1960, **12**, № 2, 69—70 (англ.)

Сообщение фирмы «Дейта Контрол» о выпуске новой небольшой цифровой машины «Контрол Дейта-160», имеющей объем конторского стола. Это универсальная быстродействующая вычислительная машина, предназначенная для широкого использования в различных областях инженерных и научных вычислений, для промышленного контроля, для обработки статистических данных. Вся машина выполнена на полупроводниковых элементах и имеет память на магнитных сердечниках на 4096 12-разрядных чисел. Скорость выполнения операций до 60 000 в 1 сек. Это одноадресная машина параллельного действия. Время выборки числа 6,4 мксек. Основное время сложения 12,8 мксек. Задержка при считывании с запоминающего устройства составляет 2,2 мксек. Среднее время действия машины 15 мксек. на одну команду. Рабочая частота машины 5 *мгц*. Машина рассчитана на выполнение 62 команд, кроме того, в ней имеется программный блок, позволяющий оперировать с 22-, 33-, 44-разрядными числами, а также выполнять арифметические и алгебраические действия с фиксированной и плавающей запятой «Контрол Дейта-160» имеет гибкую адресную систему. При одноадресной системе 12-разрядное командное слово делится на 6-разрядный функциональный код и 6-разрядный исполнительный адрес. Для достижения большей скорости вычислений в машине используется сумматорная пирамида. Большой набор команд обеспечивает управление целым рядом входных и выходных устройств. Считывание с бумажной ленты производится со скоростью 350 знаков в 1 сек., перфорирование ленты — 60 знаков в 1 сек. Имеется электрическая пишущая машинка, до 8 лентопротяжных механизмов, печатающее устройство. Стоимость машины 60 000 долл.

З. Б. Воронкова

**1 В331. Система обработки данных ИБМ-7070.** Avery R. W., Blackford S. H., McDonnel J. A. The IBM-7070 data processing system. «Proc. East. Joint Comput. Conf.», Philadelphia, Pa, 1958. NT-114. New York, 1959, 165—167. Discuss., 167—168 (англ.)

ИБМ-7070 представляет собой быстродействующую полупроводниковую систему обработки данных, предназначенную для коммерческого и для научного применения с учетом как современных требований, так и требований будущего. Система состоит из следующих основных блоков: 1) Панель управления, на которой установлен небольшой пульт управления и телетайп, являющийся основным органом управления оператора и заменяющим индикаторные лампы и переключатели управления, применяемые в остальных машинах. 2) Блоки запоминающих устройств на магнитных лентах (до 12 шт.) двух типов: модели 729II (скорость чтения-записи 15 000 слогов в 1 сек.) и модели 729IV (скорость чтения-записи до 62 500 слогов в 1 сек.). Проверка правильности записи информации на ленту осуществляется с помощью специального блока головок чтения, смонтированного за головками записи. Это обеспечивает чтение и немедленную проверку непосредственно после записи. 3) Блоки запоминающих устройств на магнитных дисках (до 45 блоков). Блок типа 7300 обеспечивает емкость 6 миллионов двоичных разрядов. Запись осуществляется тремя механизмами с магнитной головкой. Общая емкость запоминающих устройств на дисках может быть доведена до 24 миллионов разрядов. 4) Станция ручного опроса (до 10 станций). Станция типа 7900 обеспечивает быстрый опрос состояния ферритового запоминающего устройства, запоминающего устройства на дисках или на ленте. Каждая станция может соединяться с системой кабелем длиной 750 *м*. 5) Устройство считывания с перфокарт (до 3 шт.). Устройство типа 7500 работает со скоростью считывания 400 перфокарт в 1 мин. 6) Перфоратор для перфокарт (до 3 шт.) на выходе системы. Перфоратор типа 7550 перфорирует со скоростью 250 карт в 1 мин. 7) печатающее устройство (до 3 шт.). Печатающее устройство типа 7400 печатает со скоростью 150 строк в 1 мин. 8) Главный шкаф системы, содержащий основные схемы электроники и состоящий из следующих элементов: а) арифметических регистров и сумматора на сердечниках, б) модификаторов, в) места для возможного арифметического устройства с плавающей десятичной запятой, г) основного запоминающего устройства на фер-

ритовых сердечниках емкостью 5000 или 10 000 слов, д) двух каналов для данных, дешифраторов кодов, регистров данных и системы управления для запоминающих устройств на магнитной ленте и дисках, е) буферных и управляющих систем для ввода — вывода на перфокартах и печатающего устройства.

Система 7070 имеет следующие машинные характеристики. Длина слова 55 двоичных разрядов, что соответствует десяти слогам плюс знак. Каждый слог представляется пятью двоичными разрядами в коде два из пяти. Передача информации из запоминающего устройства на магнитных сердечниках осуществляется параллельным образом, передача данных на ленту, на сумматор и на ввод — вывод осуществляется последовательно. Частота следования слогов 250 *кгц*, время обращения к ферритовому запоминающему устройству 6 *мксек*. Время выборки числа с диска колеблется от 105 до 850 *мсек*. Полное время распространения переноса в сумматоре 4 *мксек*., сложение пяти слогов (представленных в коде 2 из 5) занимает 60 *мксек*., время выполнения программы вычисления синуса составляет 7,7 (минимум), 10,3 (среднее), 12,9 (максимум) *мсек*., время выполнения программы вычисления арктангенса составляет 9,9 (минимум), 14,1 (среднее), 17,2 (максимум) *мсек*.

Инструкция занимает 10 десятичных разрядов плюс знак. Автоматическая интерпретация команд выполняется с помощью 99 индексных слов, хранимых в запоминающем устройстве на магнитных сердечниках. В системе предусмотрена возможность автоматической установки приоритета того или иного устройства ввода — вывода. Конструктивно система состоит из группы шкафов, в которые вставляются блоки, выполненные печатным монтажом. Используется примерно 14 000 блоков, 30 000 германиевых сплавных транзисторов, 22 000 германиевых диодов. Логические схемы и схемы управления используют транзисторно-диодную логику с дополняющими (*p-n-p* и *n-p-n*) транзисторами. В схемах синхронизации запоминающих устройств используется принцип переключения тока. Арифметические регистры, сумматор, преобразователи кода и схемы проверки правильности передач выполнены на магнитных сердечниках.

Г. Х. Новик

**1 В332. Вычислительная система для одновременного выполнения нескольких программ** —. Computer system to handle multiple programs simultaneously. «Automat. Control», 1959, 10, 64—65 (англ.)

Фирма «Minneapolis—Honeywell Regulator» сообщает о выпуске новой вычислительной машины «800», позволяющей одновременно выполнять до 8 различных программ. В машине имеются два новых устройства: управление расписанием и управление несколькими программами. Первое устройство управляет 16 входными выходными магистралями и распределяет во времени их взаимодействие с центральным устройством управления. Второе устройство позволяет обрабатывать несколько программ без специального программирования. Машина «800» является трехадресной, двоично-десятичной машиной, работающей с плавающей запятой. Число состоит из 48 двоичных разрядов, представляющих 8 знаков или 12 десятичных разрядов. Запоминающее устройство будет иметь емкость от 4096 до 16 384 чисел. Частота передачи информации 140 *кгц*. При трехадресной работе машина выполняет 30 000 операций в 1 сек., при одноадресной 60 000 операций в 1 сек. Входные выходные устройства на магнитной ленте шириной 19 *мм*, общей емкостью 20 000 000 десятичных цифр, позволяют одновременное чтение 8 блоков и запись 8 блоков ленты со скоростью 96 000 десятичных цифр в 1 сек. для каждого блока. Одновременно могут работать 8 устройств для чтения перфокарт со скоростью 240 карт в 1 мин., 8 устройств со скоростью 450 карт в 1 мин., 8 строкопечатающих устройств со скоростью 150 строк в 1 мин., 8 строкопечатающих устройств 6 001 900 строк в 1 мин., 8 перфораторов на 100 карт в 1 мин. и 8 быстродействующих перфораторов на 200 карт в 1 мин. Машина будет выпускаться на заводе «Datamatic», срок изготовления первой машины 3-й квартал 1960 г. О. В. Бачин

**1 В333. ТРАНЗАК-С-2000 — универсальная система для обработки данных полностью на полупроводниковых приборах.** Segal R. J. TRANSAC S-2000 — a case history of a completely transistorized large scale data processing system. «Proc. 5th Nat. Sympos. Reliabil. and. Qual. Control Electron.» (1959, Philadelphia, Pa). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 1—14 (англ.)

Приводятся данные вычислительной машины ТРАНЗАК-С-2000, арифметическое устройство которой работает со скоростью в 3—5 раз больше, потребляет $^1/_5$ часть по мощности и имеет надежность более чем в 10 раз выше, чем аналогичное устройство на электронных лампах. Высокая надежность системы явилась результатом: 1) использования транзисторов в качестве активных элементов, 2) применения модульной конструкции блоков, 3) тщательного учета и строгой оценки факторов, влияющих на надежность работы отдельных элементов и узлов в период конструирования и наладки. В машине используются поверхностно-барьерные триоды фирмы «Филко» 2N345 (SB-102). Во время предварительного испытания большой партии транзисторов в течение 10 000 час. при нагрузке 15%, 100% и 200% по мощности рассеяния и непрерывном изменении температуры окружающей среды не было случая выхода из строя или резкого изменения параметров этих триодов. Высокая надежность и стабильность объясняется высококачественной технологией изготовления коллекторного и эмиттерного переходов и контролем толщины базы. Все логические цепи машины строятся из двух простых элементов: усилителя по схеме с общим эмиттером и эмиттерного повторителя — схема с общим коллектором. В арифметическом устройстве и устройстве управления они составляют 85% всего оборудования: 30,8% 18 601 транзисторов, 35,7% 21545 сопротивлений, 18,5% 11207 конденсаторов. Все электрические соединения выполнены печатным монтажом с расстоянием между проводниками в 0,8 *мм*. Медная поверхность во избежание коррозии покрыта тонким слоем золота. Для пайки используется антикоррозийный флюс. Выходные разъемы печатных карт покрыты никель-радиевым слоем толщиной в 0,0075 *мм*, входные разъемы выполнены из фосфористой бронзы, покрытой слоем золота. Такая конструкция позволяет производить более чем 20 000 размыканий контактов, аналогичным образом выполнены и кабельные разъемы. Для снижения уровня электрических шумов применена высококачественная фильтрация питающих напряжений, обеспечивающая уменьшение коэффициента шумов на 80 *дб*. Применение эмиттерных повторителей, имеющих выходное сопротивление от 15 *ом* до 30 *ом*, резко уменьшает помехи и наводки. Для питания схем используются два номинала напряжений —3,5 *в* и +6 *в* с 3%-ным допуском. Установка питания для машины ТРАНЗАК-С-2000 построена целиком на полупроводниковых приборах. Она обеспечивает выходное сопротивление менее 10 *мом*, пульсации выходного напряжения при полной нагрузке менее 1 *мв* и стабильность лучше, чем 0,5%. Устройство питания сконструировано из условий получения максимальной надежности. Полупроводниковые приборы работают при менее чем 50% мощности рассеяния в регулируемом тепловом режиме. Для автоматической регулировки выходных напряжений применяются схемы с использованием режима насыщения и используются кремниевые опорные диоды — стабилитроны. Для коммутации питающих цепей используются ртутные реле с временем срабатывания от 1 *мсек*. до 3 *мсек*. Основным строительным элементом машины является электрический модуль — карта с печатным монтажом размерами 10 *см* × 2,2 *см*. Каждый модуль содержит 4 транзистора, сопротивления и кон-

денсаторы. Модули запаиваются на более крупной карте с выходным разъемом. На каждой такой карте может быть вмонтировано до 21 модуля, исключение составляют карты световой индикации и усилители записи — считывания быстродействующей памяти и магнитного барабана, где большая мощность рассеяния не позволяет применить высокую плотность модульной конструкции. До 100 крупных карт набираются в механический модуль. Арифметическое устройство и устройство управления смонтированы в трех механических модулях и занимают место не более письменного стола. В целях обеспечения нормального теплового режима полупроводников, для устройства питания сконструированы специальные механические модули, обеспечивающие хорошую вентиляцию и максимальную теплоотдачу. Во время наладки арифметического устройства за период в 1000 час. было обнаружено в среднем 10,7 неисправностей, что составило 93 часа среднего рабочего времени. Для сравнения может быть взята машина ТРАНЗАК-С-1000, содержащая около 8000 транзисторов. Во время эксплуатации за 1080 час. было обнаружено 6 неисправностей, из них две за счет транзисторов, что составляет 180 час. рабочего времени. За 1032 час. наладки машины ТРАНЗАК-С-2000 было заменено 24 детали, из них 17 полупроводников, причем 80% из них по вине обслуживающего персонала. Во время отладки тестовых программ не было ни одного сбоя в работе по причине неисправности элементов. Более точные данные о надежности работы системы будут опубликованы по истечении значительного периода эксплуатации. В машине ТРАНЗАК-С-2000 содержится более чем полмиллиона электронных компонент, включая: 400 000 магнитных сердечников, 60 677 сопротивлений, 43 000 транзисторов, 28 146 конденсаторов, 1064 диодов, 703 трансформаторов, 96 кассет с магнитными сердечниками, 994 неоновых ламп и др. ТРАНЗАК-С-2000 производит в 1 сек., включая обращение к памяти 60 000 сложений и вычитаний, 26 000 умножений, 17 000 делений и 83 000 операций сравнения. Емкость быстродействующего запоминающего устройства 4096 слов. Длина слова 48 двоичных разрядов. Система команд — одноадресная. В одном слове содержится две одноадресные команды. Для составления программ существуют более 200 команд, включая 57 команд с плавающей запятой. Входные и выходные устройства: скорость записи считывания устройств на магнитной ленте составляет 90 000 цифр в 1 сек., скорость движения ленты 0,375 *м* в 1 сек., скорость считывания с перфокарт 600 карт в 1 мин., скорость работы перфоратора перфокарт 1000 карт в 1 мин., скорость считывания с перфокарты 1000 цифр в 1 сек., скорость работы перфоратора перфоленты 60 цифр в 1 сек., емкость магнитного барабана 32768 слов. Имеется быстропечатающее устройство, работающее со скоростью 900 строк по 120 знаков в строке в 1 мин., устройство для преобразования и печати данных между магнитной лентой и перфокартами, устройство для чтения 5-, 6-, 7- или 8-позиционной перфоленты и магнитной ленты.

Г. И. Гришаков

**1 В334. Вычислительная машина с визуальной регистрацией, предназначенная для финансовых операций —.** Visible record computer designed for the banking industry. «Electr. Engng», 1959, 78, № 11, 1138—1139 (англ.)

Сообщается об электронной цифровой системе для обработки данных B251 фирмы «Берроуз». Система названа машиной с визуальной регистрацией. Она выполнена на полупроводниковых приборах и предназначена для ведения финансово-учетных, кредитных и других банковских операций, выбора статистических данных о состоянии баланса, составления отчетности и сводок. Система состоит из сортирующего устройства, вычислительной машины, регистратора результатов и пульта оператора. Электронное сортирующее устройство сортирует финансовые документы, производя при этом считывание знаков, нанесенных на поверхности документа магнитными чернилами (номер документа, шифр клиента, денежные суммы и другая информация). Вычислительная машина обрабатывает поступающую информацию и передает результаты на регистратор, который печатает сводные ведомости и отчеты. Одновременно проверяется состояние текущих счетов клиентов. Панель оператора служит для управления системой. На ней размещены кнопки выбора программ, кнопки управления, световая индикация состояния системы, клавиатура для ввода дополнительных данных и инструкций. Кроме регистрации данных в сводных ведомостях в печатной форме может быть внесена запись на обрабатываемый бланк. Для этого на обратной стороне стандартного бланка нанесены две полоски ферромагнитного покрытия, куда данные заносятся аналогично записи на магнитную ленту. Емкость полосок на документе составляет 7 кодов, код содержит 12 разрядов и знак. Программы работы системы нанесены на эластичную ленту из пластика. Бобины с лентой вводятся в блок управления. Система насчитывает до 12 блоков считывания с лент; это определяет максимальную емкость программы в 2500 инструкций. В комплект системы входит библиотека стандартных программ. Вычислительная машина полностью выполнена на полупроводниковых приборах. Запоминающее устройство машины на магнитных сердечниках состоит из отдельных блоков сердечников, емкостью 10 кодов каждый. Общая емкость запоминающего устройства определяется потребностью заказчика. Устройство используется только для хранения промежуточных результатов вычислений, итогов и констант, необходимых при арифметических действиях. Скорость работы системы 4000 арифметических операций в 1 мин. Печатающее устройство работает со скоростью 200 строк в 1 мин. и имеет 160 печатных позиций. Формат печати задается оператором на панели управления. Система в целом обслуживается одним человеком, и не нуждается в специально оборудованном помещении или в кондиционировании воздуха.

Е. Ф. Бережной

**1 В335. Система команд для новой вычислительной машины малого размера.** Frankel S., Cass James. Instruction codes for a new desk-size digital computer. «Automat. Progr.», 1959, 4, № 10, 332—333, 337 (англ.)

Приведены данные о составе устройств и системе команд новой цифровой вычислительной машины малого размера LGP-30, выпущенной в США. Машина имеет оперативное запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 4096 двоичных кодов. Числа расположены на 64 дорожках барабана. На одной дорожке помещаются 64 32-разрядных кода. Для считывания и записи служит одна головка. Скорость вращения барабана 3600 оборотов в 1 мин., максимальное время ожидания 17 мсек., усредненное время ожидания около 2 мсек. Числа представлены последовательным кодом, в системе с фиксированной запятой, запятая расположена перед крайней левой цифрой. Из 32 разрядов один разряд отведен под знак числа, 30 разрядов — цифровая часть числа и один разрядный промежуток разделяет соседние числа. В одноадресной системе команд содержится 16 команд. Длина команды 16 разрядов, из них номер операции занимает 4 разряда, адрес кода 12 разрядов. В составе машины имеются три регистра: счетчик — регистр номера следующей команды, регистр исполняемой команды и сумматор накапливающего типа в арифметическом устройстве. Машина выполняет 4 основных арифметических операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Для умножения имеются две команды: умножение с записью 30 старших разрядов произведения и умножение с записью 30 младших разрядов. В состав команд входят также команда логического умножения и команда переноса, позволяющая ло-

местить код из запоминающего устройства в накапливающий сумматор со стиранием предыдущего содержания сумматора. Группа команд передачи управления включает команды безусловной передачи управления и условной передачи по знаку числа, находящегося в сумматоре. Результат арифметической операции переносится в запоминающее устройство двумя командами: со сбросом и без сброса числа, находящегося в сумматоре. Для арифметических операций с адресной частью команды служит операция записи адреса, которая пересылает из сумматора в запоминающее устройство адресную часть команды и не нарушает номер операции. Отладка программы обеспечивается наличием однотактного режима работы и команды останова в заданной точке программы. Ввод программы и данных и вывод результатов из машины выполняется электромеханическим печатающим устройством «Flexowriter», работающим с бумажной перфолентой. В процессе работы машины печатающее устройство целиком управляется командами машины и используется для печати результатов. Команда печати модифицируется значением старших шести разрядов адреса, что позволяет печатать десятичные знаки, буквы, знаки препинания, обозначать сдвиги вверх или вниз, возврат каретки и т. п. Печатающее устройство, кроме считывания и печати, размножает копии перфолент. Е. Ф. Бережной

**1 В336. «Пайлот» — система вычислительных машин Национального бюро стандартов США.** Leiner A. L., Notz W. A., Smith J. L., Weinberger A. Pilot, the NBS multicomputer system, «Proc. East. Joint Comput. Conf.», Philadelphia, Pa, 1958. NT-114. New York, 1959, 71—75 (англ.)

В Национальном бюро стандартов разработана новая большая цифровая система для выполнения широкого круга экспериментальных исследований особой правительственной важности. Эта система может быть использована для обработки данных, для математического решения научных задач, для целей управления в истинном масштабе времени и для работы в системе с другими цифровыми машинами. Система «Пайлот» обладает высоким быстродействием, исключительно гибкой системой управления для связи с внешним миром, содержит три независимо программируемые цифровые вычислительные машины, каждая из которых специально приспособлена для выполнения определенного класса операций, которые часто встречаются при применении больших задач по обработке данных. Взаимосвязь между вычислительными машинами осуществлена таким образом что обеспечена возможность работы всем трем машинам одновременно на одну общую задачу. Центральная система обработки данных, устройство управления, устройство хранения данных и внешние устройства содержат примерно 7000 вакуумных ламп и 165 000 полупроводниковых диодов. Основой системы «Пайлот» является машина ДИСЕАК, последняя является развитием машины СЕАК. Быстродействие арифметического устройства новой системы в значительной степени определяется наличием параллельного сумматора и диодно-конденсаторного запоминающего устройства, имеющего время одного обращения около 1 мксек. Сложение, вычитание и сравнение в режиме работы с фиксированной запятой составляет 6÷9 мксек., умножение в режиме работы с фиксированной запятой 26÷40 мксек., деление с фиксированной запятой 72—74 мксек. Сложение и вычитание в режиме работы с плавающей запятой 19÷21 мксек., умножение в режиме работы с плавающей запятой составляет 28÷40 мксек. Система «Пилот» состоит из семи основных частей: 1) первичной вычислительной машины; 2) первичного запоминающего устройства; 3) вторичной вычислительной машины и вторичного запоминающего устройства; 4) системы управления вводом-выводом; 5) внешних запоминающих устройств; 6) внешних устройств ввода-вывода; считывающих устройств, печатающих устройств, индикаторов; 7) внешней системы управления. Первичная вычислительная машина представляет собой быстродействующую вычислительную машину общего назначения и имеет как арифметическое устройство, так и гибкое устройство управления. Длина слова в этой машине составляет 62 двоичных разряда плюс знак. Она может выполнять 7 арифметических операций (сложение, присчитывание, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня и сдвиг), 5 типов операций перехода и 2 типа логических операций. Операции с фиксированной запятой могут проводиться с двумя независимыми полусловами. Устройство управления машины оперирует с 68-разрядными 3-адресными инструкциями, которые могут автоматически модифицироваться. Возможна работа с относительными адресами. Быстродействующее диодно-конденсаторное запоминающее устройство имеет емкость 32 768 полных слов. Время выборки колеблется от 1 до 33 мксек. Вторичная вычислительная машина работает в тесной связи с первичной машиной и оперирует со словом длиной 16 разрядов; обеспечивая выполнение 16 различных типов операций: 6 арифметических операций, 4 операции перехода, 1 операции обработки нечисловой информации и 5 операций передачи информации или сигналов управления между первичной и вторичной вычислительными машинами. Рабочие времена вторичной машины составляют около 2 мсек. Важнейшими задачами вторичной машины являются: подсчет операций, систематическая модификация адресов и управление первичной программой. Запоминающее устройство вторичной машины имеет емкость 60 ячеек. Устройство управления вторичной машиной оперирует с двухадресной инструкцией. Третья вычислительная машина управляет форматом информации на входе-выходе системы, осуществляет поиск магнитных лент, рассортировку данных во внутренних запоминающих устройствах, преобразование кодов информации и т. д. Система «Пайлот» может работать с широким кругом вводных и выводных устройств как с дискретными, так и с непрерывными. Г. Х. Новик

**1 В337. ТРАДИК: первая фаза.** Harris J. R. TRADIC: the first phase. «Bell Labs Rec.», 1958, **36**, № 9, 330—334 (англ.)

Описывается первый вариант математической машины ТРАДИК, построенный в 1954 г., в стационарном варианте с целью проверки возможности создания авиационной математической машины на транзисторах. Основными элементами машины служили импульсный усилитель, ключи на германиевых диодах и линии задержки. Генератор тактовых импульсов был выполнен на электронных лампах. Тактовая частота машины равнялась 1 *мгц*, длительность импульса составляла 0,5 мксек. Для введения программы служили сменные наборные доски, на каждой из которых можно набрать 64 одноадресных инструкции. Время сложения или вычитания 16-разрядных двоичных чисел составляет 16 мксек., время умножения меньше 300 мксек. Оперативная память выполнена на электромагнитных линиях задержки. На выборку чисел практически время не теряется, так как одна линия задержки служит для хранения одного числа. Подробно описана типовая схема И на 4 входа с импульсным усилителем, конструктивно размещенная в одном стандартном блочке. Выходной преобразователь цифра — напряжение выполнен по принципу суммирования токов, величины которых пропорциональны степеням двойки. Машина потребляет 60 *вт* мощности по постоянному току. С мая 1954 г. до мая 1956 г. машина работала круглосуточно. За это время шла проверка надежности ее работы. При этом путем изменения в определенных пределах номиналов питающих напряжений выявлялись элементы, работающие ненадежно. В течение 2 лет не вышло из строя ни одного сопротивления и конденса-

тора. Были заменены 8 транзисторов из общего числа 684 и 9 диодов из 10358. А. Н. Чуйкин

**1 В338. Свойства системы для обработки информации ИБМ-РАМАК.** Longman Trevor. Features of the IBM Ramac system. «Automat. Data Process.», 1960, 2, № 1, 23—29 (англ.)

Описана система ИБМ-РАМАК-305, предназначенная для выполнения коммерческих, экономических, финансовых, статистических и других работ большого объема с обработкой информации по «линейному» принципу. «Линейный» принцип требует наличия в системе запоминающего устройства весьма большого объема с произвольной выборкой. Использовано запоминающее устройство на магнитных дисках. Система сбалансирована: время ввода, обработки и вывода данных согласовано, в системе при работе течет непрерывный поток информации. Основные устройства — панель управления с механизмом ввода с перфокарт, процессор, печатающее устройство, перфоратор, запоминающее устройство на дисках. Процессор типа 305 состоит из блока арифметических и логических операций, запоминающего устройства на магнитном барабане и узла буферных регистров на магнитных сердечниках. На барабан заносятся программы работы системы и промежуточные результаты вычислений, часть дорожек барабана отведена под регистры арифметического блока и буферные регистры внешних устройств. Память на магнитных сердечниках употребляется как синхронизатор при всех передачах информации между устройствами. Ее емкость 100 знаков. Скорость работы процессора: передача между дорожками барабана 30 мсек.; передача между запоминающим устройством на дисках и барабаном в среднем 55 мсек.; время сложения и вычитания 30 мсек. (машина может выполнять 10 сложений одновременно); время, затрачиваемое на умножение, 20 мсек.+10 мсек. на каждую цифру множителя; время деления 20 мсек.+20 мсек. на каждую цифру частного; продолжительность одного оборота барабана 10 мсек. Запоминающие устройства типа ИБМ-350 на магнитных дисках выпущены в двух моделях на 5 и на 10 млн. знаков. Система может иметь два устройства, общая емкость памяти на дисках составляет от 5 до 20 млн. знаков. В составе устройства 50 дисков, имеющих общую ось вращения. Скорость вращения 1200 об/мин. На диске имеется 100 или 200 дорожек, разделенных на 10 секторов, по 100 знаков в каждом секторе. Как правило, устройство имеет один рычаг выборки с магнитной головкой для считывания и записи. Время перемещения рычага от одной к другой дорожке диска 225 мсек., перемещение рычага с дорожки одного диска на дорожку другого требует 600 мсек. Возможно добавление второго рычага выборки. Запоминающие устройства на дисках типа 350 добавлены и к выпускаемым фирмой системам обработки информации ИБМ-650 и ИБМ-7070. Печатающее устройство выводит результаты на бумажную ленту с длиной строки до 200 *мм*. Скорость вывода может меняться от 30 строк в 1 мин. (с 80 знаками в строке) до 80 строк (с 20 знаками в строке). Формат печати задается на панели управления. Буферным регистром для перфоратора служит одна из дорожек барабана. Производительность перфоратора 100 перфокарт в 1 мин. Производительность механизма ввода с перфокарт 125 перфокарт в 1 мин. Механизм ввода дополняется устройством ввода с перфоленты типа ИБМ-382. Панель управления имеет световую индукцию состояния системы, клавиши управления и узел печати затребованных данных. Введены средства, с помощью которых оператор может, прервав процесс обработки данных, немедленно передать на узел печати любой массив информации, содержащийся в машине. Это необходимо при работе системы в финансово-коммерческой сфере и используется для проверки общего баланса, текущего счета клиента по запросу и т. п. Скорость работы узла печати 10 знаков в 1 сек. Кроме узла печати, на панели управления имеются автономные узлы печати, оборудованные средствами запроса. Эти узлы, общим числом до четырех, рассчитаны на дистанционную установку на расстоянии до 800 *м*. Дуальная система управления процессами (от программы на магнитном барабане и от панели управления и узлов запроса) обеспечивает одновременность и независимость нескольких процессов обработки данных и большую гибкость логических операций. Система имеет развитые средства автоматического контроля правильности работы. Проверяются процессы обработки данных в системе, передача информации между устройствами, запись данных на магнитные запоминающие устройства и др. Приведена блок-схема системы, описана последовательность работы устройств в ходе обработки коммерческой сделки. Приведены примеры использования системы РАМАК при экономическом анализе, планировании производства, расчетах себестоимости и зарплаты, статистической обработке данных, управлении движением транспортных средств. Имеются показатели объема работ для некоторых конкретных применений и экономической эффективности использования системы РАМАК. К концу 1959 г. установлено около 600 систем ИБМ-РАМАК-305, в том числе около 20 в Европе. Е. Ф. Бережной

**1 В339. Первая вычислительная установка УКТ для Европы.** Tetzner Karl. Die erste UCT-Rechenmaschine für Europa. «Elektronik», 1959, 8, № 2, 33—35 (нем.)

Сообщается о поставке Дрезденскому банку в Гамбурге машины УКТ (UCT — Univac Calculating Tabulator), выпускаемой фирмой «Ремингтон Ренд» (США). Подобные установки заказаны еще рядом западно-германских фирм — «Opel», «Mannesmann und Hamburger Gaswerken». Стоимость УКТ 1,5 млн. немецких марок или арендная плата 30 тыс. марок в месяц. Перед тем, как остановиться на выборе этой машины, экспертами банка совместно с консультантами по вычислительной технике было рассмотрено почти 500 конструкций машин, разработанных во всех странах мира. Машина содержит 600 транзисторов и диодов и 4000 магнитных усилителей миниатюрного типа. Потребление мощности по сравнению с ламповой машиной подобного рода уменьшено в 5 раз, что сняло необходимость отвода тепла и позволило создать компактную конструкцию. Установка состоит из четырех блоков: скоростного считывающего устройства (450 90-разрядных перфокарт в 1 мин.), реперфоратора (150 карт в 1 мин.), центрального вычислительного устройства с магнитным барабаном на 5000 чисел-слов по 10 разрядов плюс знак быстродействующей печати 600 строк в 1 мин. со 130 знаками в строке. Производительность машины 11 700 сложений или 3900 умножений или 20 000 сравнений в 1 сек. Время выборки из нормально расположенных ячеек барабана находится в пределах от 0 до 3,4 мсек., из каналов быстрой выборки — максимум 0,9 мсек. За месяц машина обрабатывает документы центрального банка, его двух филиалов и девятнадцати депозитных касс в количестве 1,5 млн. перфокарт с общим весом 4500 *кг*. А. Ф. Смирнов

**1 В340. «Метеор».** Knighting E. Meteor. «Meteorol. Mag.», 1959, 88, № 1047, 266—269 (англ.)

Название «Метеор» получила вычислительная машина «Меркурий» фирмы «Ферранти», установленная в Данстэбле и используемая для цифровых расчетов при предсказании погоды. Эта машина производит передачу числа в сумматор за 120 мксек., сложение чисел за 180 мксек., умножение за 300 мксек. Такая скорость работы позволяет производить цифровое предсказание погоды, включающее несколько миллионов операций за 30 мин. Быстродействующее запоминающее устройство машины, построенное на магнитных сердечниках, имеет емкость 1024 40-разрядных числа и может хранить 2048 20-разрядных команд. Запоминающее устройство на магнитных барабанах содержит 4 барабана, каждый из

которых несет 128 секторов по 32 числа, причем содержание каждого сектора может быть передано в быстродействующее запоминающее устройство за 16 мсек. Входной телетайп принимает 200 букв в 1 сек., на выходе телетайп печатает 33 буквы в 1 сек., а строкопечатающее устройство печатает 150 строк по 92 буквы в 1 мин. Машина размещается в металлических шкафах высотой 190 *см*, глубиной 38 *см* и общей шириной 12 *м*. В отдельных 4 больших шкафах размещаются магнитные барабаны и мотор-генератор мощностью 45 *квт*. В машине содержится около 5000 вакуумных ламп и 3500 кристаллических триодов. О. В. Бачин

**1 В341. Новая вычислительная машина —.** New A. E. I. computer. «BTH Activities», 1959, **30**, № 6, 236 (англ.)

Сообщается о ходе работ по выпуску первого промышленного образца вычислительной машины, являющейся центральным узлом системы для обработки информации AEI-1010. Система AEI-1010 (называвшаяся ранее системой Metrovick-1010) создается отделением электронной аппаратуры фирмы «AEI» в Trafford Park (Манчестер). Ориентировочная стоимость системы 150 тыс. фунтов стерлингов. По сравнению с существующими системами такой же стоимости она будет в 2 раза производительнее. Вычислительная машина системы выполнена полностью на полупроводниковых триодах и может выполнять около 70 000 инструкций в 1 сек. Система включает до 32 единиц устройств ввода и вывода (устройства считывания с перфоленты и перфокарт, блоки магнитных лент, печатающие устройства, перфораторы и т. п.). Предусмотрены средства для осуществления параллельной работы этих устройств. Первый экземпляр системы AEI-1010 будет установлен в вычислительном центре г. Манчестера к концу 1960 г. Е. Ф. Бережной

**1 В342. Электронная математическая машина дискретного действия ГЕК2М.** Ray Amaresh. Electronic digital computer — HEC2M. «J. Instn Telecommun. Engrs», 1958, **4**, № 3, 137—142 (англ.)

Описывается работа, проведенная в индийском Статистическом институте в Калькутте, связанная с внесением улучшений и усовершенствований в схему математической машины ГЕК2М, купленной в Англии и вступившей в эксплуатацию в апреле 1956 г. В качестве запоминающего устройства в машине используется магнитный барабан с 64 дорожками, имеющий емкость 1024 32-разрядных двоичных числа. Время выполнения одного сложения или вычитания равно 1,25 мсек. Введение схемы «запоминания следующей инструкции» позволило в случае сбоя и останова машины точно определить то место в программе, где произошел сбой. Была повышена надежность работы релейных схем, управляющих выборкой дорожек магнитного барабана. Была также разработана схема автоматической задержки на время переключения дорожек. Специально разработанная схема позволила сократить время выполнения умножения, составлявшее 200—300 мсек., примерно в 8 раз. А. Н. Чуйкин

**1 В343. Описание электронной вычислительной машины ЗЕБРА и ее характеристики.** Jeanneret C. Réglage et calculatrices électroniques. Description de la maschine arithmétique électronique ZEBRA et de ses performances. «Bull. techn. Suisse romande», 1959, **85**, № 22, 337—345 (франц.)

Приводятся основные данные о машине «Стантек-ЗЕБРА» (Stantec ZEBRA): скорость ее работы, используемое оборудование, система команд, методика выполнения отдельных команд, примеры составления элементарных программ (см. также РЖМат, 1960, 964).

И. А. Ефимов

**1 В344. Вычислительные машины в центральной Европе.** Blachman Nelson M. Central-European computers. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, **2**, № 9, 14—18 (англ.)

Обзор основных вычислительных машин ГДР, Австрии, Чехословакии и Югославии. Первая цифровая вычислительная машина ГДР «Опрема» (РЖМат, 1957, 6020) была построена в Иене на предприятии Цейсс и использовала 25 000 реле. Новая машина ЦРА-1 (ZRA-1) построена там же (РЖМат, 1960, 7045). Чехословацкая машина САПО (РЖМат, 1955, 3458) имеет релейную логику и магнитный барабан для запоминания информации и выполняет 3 операции в 1 сек. В Исследовательском институте математических машин в Праге разрабатывается более быстродействующая машина. Это будет последовательно-параллельная машина с магнитным барабаном и тактовой частотой 1 *мгц*, выполняющая 110 000 операций в 1 сек. Машина будет работать с одноадресными инструкциями и числами 65 разрядными двоичными цифрами с фиксированной запятой.

В техническом Высшем училище Вены в 1956—1958 гг. построена полупроводниковая вычислительная машина «Майлюфтерл» (РЖМат, 1960, 2391). В Австрии имеется также машина ИБМ-650 в Вене, Z-22 в Линце и «Umasse» фирмы «Ремингтон Ренд» в Вене.

В настоящее время в Югославии развита в основном аналоговая вычислительная техника. В Исследовательском институте Бориса Кидрича построена модель реактора — дифференциальный анализатор с 20 операционными усилителями, устройство для решения 30 уравнений методом Гаусса—Зейделя и дифференциальный анализатор, повторяющий решение с частотой 50 *гц*. В Институте Никола Тесла построен дифференциальный анализатор с 12 операционными усилителями. В настоящее время в Институте Бориса Кидрича строится цифровая вычислительная машина, предназначенная для ядерных расчетов. Она будет иметь тактовую частоту 100 *кгц*, длину числа 30 разрядов. Одноразрядная инструкция будет занимать одно число и числа с фиксированной запятой будут обрабатываться в последовательном коде. Параллельное запоминающее устройство на 4096 чисел будет выполнено на ферритовых сердечниках. Кроме того, в Белграде для целей переписи устанавливается машина ИБМ-705. Приводятся биографические сведения о создателях вышеперечисленных машин, а также некоторые данные о развитии вычислительной техники в Китайской Народной Республике. О. В. Бачин

**1 В345. Электронные вычислительные машины.** Röthlisberger Ingo. Elektronische Rechengeräte. «Schweiz. techn. Z.», 1959, **56**, № 42, 849—857 (нем.; рез. франц.)

В популярной форме излагаются принципы построения первой цифровой машины «Эрмет» (Ermeth) Швейцарской высшей технической школы. В машине применяется код Эйкена (код 2-4-2-1). Запись десятичных чисел производится по вертикали, например, число 853 записывается как

1 1 0
1 0 0
1 1 1
0 1 1
(853)

Запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане, запись производится импульсами длительностью 1 мксек. и амплитудой 0,5*А*. Вес алюминиевого цилиндра барабана 100 *кг*, число оборотов 6000 в 1 мин. Машина выполнена, в основном, на лампах. Ноль и единица представлены синусоидальными напряжениями частотой 352 *кгц*, сдвинутыми по фазе на $\pi$. Машина имеет 49 команд, выполняет сложение за 5 мсек, умножение за 16 мсек., деление за 30 мсек., но очень проста в эксплуатации, так что работа на ней не требует технических знаний. Т. И. Евсеенко

**1 В346. Вычислительная машина «Сименс-2002».** Ulbricht H. W. Der Siemens Digitalrechner 2002.

«Automatisierung», 1959, 4, № 6, 27—29 (нем.)

Разработка и введение в серийное производство первой немецкой вычислительной машины на полупроводниках было осуществлено фирмой «Сименс-Гальске» (ФРГ). Элементы с печатным монтажом, наличие в качестве рабочей памяти устройства на магнитных сердечниках, динамический принцип работы регистров машин — таковы основные отличия новой машины. Технические данные вычислительной машины «Сименс-2002»: разрядная сетка на 12 разрядов (десятичных) + знак в коде «с избытком 3» (тетрады); вид работы — внутри тетрады параллельный, между тетрадами последовательный; рабочая память — магнитные сердечники емкостью 2000 чисел; дополнительная память — магнитный барабан емкостью 10 000 чисел; управление — одноадресная система, фиксированная и плавающая запятая, три регистра индексов; тактовая частота 200 *кгц*; стандартный импульс 1,25 мксек.; при работе с фиксированной запятой время сложения — вычитания 90 мксек.; умножения 1260 мксек., деления 3510 мксек.; при работе с плавающей запятой время сложения — вычитания 450 мксек.; умножения 1350 мксек.; деления 3240 мксек.; средняя скорость 2200 операций в 1 сек. для фиксированной запятой и 1850 операций в 1 сек. для плавающей запятой; устройство ввода — перфолента со скоростью 400 знаков в 1 сек.; устройство вывода — перфолента со скоростью 20—50 знаков в 1 сек.; занимаемая площадь 40—50 $м^2$; потребляемая мощность менее 3 *квт*.

А. Ф. Смирнов

**1 В347. Электронная вычислительная машина без электронных ламп.** Gerwin Robert. Ein elektronischer Rechner ohne Elektronenröhren. «VDI-Nachr.», 1959, 13, № 9, 10 (нем.)

Сообщается о поставке Технической высшей школе в Аахене вычислительной машины «Сименс-2002», разработанной фирмой «Сименс-Гальске» и являющейся первой в Европе серийной машиной на полупроводниковых приборах. Арифметическое устройство машины 2002 оперирует с двоично-кодированными десятичными разрядами. Избыточные комбинации, всегда имеющие место при таком кодировании, удачно используются для выявления сбоев при счете. Для хранения одного числа в оперативном (рабочем) запоминающем устройстве необходимо 52 сердечника. Магнитный барабан вращается со скоростью 3000 оборотов в 1 мин., зазор между головками и барабаном равен 50 *мк*, а биение оси 4 *мк* по абсолютной величине. В процессе разработки находится система автопрограммирования на эту машину. Среднее количество операций в 1 сек. 1850 при вычислениях с плавающей запятой дано из расчета программы, состоящей на 50% из команд управления, на 25% из сложения — вычитания и на 25% из умножения (основные данные машины 2002 в реф. 1 В346). Всего в машине имеется 15 000 транзисторов, 30 000 диодов и 60 000 сопротивлений, размещенных на платах пяти типов, размером не более почтовой открытки. Некоторое число ламп все же сохранено в тактовом генераторе.

Примечание референта. В данном и вышеприведенном источниках (реф. 1 В346) имеются расхождения в характеристиках отдельных узлов машины, например, время обращения к оперативному запоминающему устройству равно 5 и 15 мксек., потребляемая мощность 3 и 5 *квт* в разных источниках.

А. Ф. Смирнов

**1 В348. Развитие японских цифровых вычислительных машин.** Takahashi S. Development of Japanese digital computers. «Comput. J.», 1959, 2, № 3, 122—129 (англ.)

Приводится обзор современного состояния цифровой вычислительной техники в Японии. Подробно описывается принцип действия нового переключательного элемента, параметрона, разработанного в Токийском университете в 1954 г. (РЖМат, 1959, 11628). В качестве запоминающих устройств в машинах на параметронах используются матрицы на тороидальных ферритовых сердечниках. Запись информации в таких устройствах производится методом совпадения полутоков. При считывании сердечники возбуждаются переменным напряжением с небольшой амплитудой. Это напряжение не перемагничивает сердечника, но вызывает появление на выходной шине сигнала несимметричной формы. Из этого сигнала выделяется вторая гармоника, фаза которой зависит от состояния сердечника. Эта гармоника воздействует на параметрон, играющий в данном случае роль усилителя выходного сигнала матрицы. Ряд других японских машин использует феррит-транзисторные динамические логические и запоминающие элементы. Приводятся основные данные современных японских цифровых вычислительных машин (ETL Mark-1, -2, -3, -4, -4a, -5; Facom-128, -128b, -212, -222; «Fujic», TAC, PD-1516; PC-1, -2; m-1, HIPAC-1, -301; NEAC-1101, -2201, -2203; SENAC-1, OPK-1, H-1, «Yamato», KCC, HITAC-1, «Tobac III»).

А. В. Шилейко

**1 В349. Электронная вычислительная машина на транзисторах. (ETL Mark IV).** Такахаси Сигэру. «Дэнси когё, «Electronician», 1958, 7, № 10, 19—25 (японск.)

Краткое описание японской транзисторной электронной вычислительной машины ETL-Mark IV. Приводятся ее данные: 1) Общие сведения о машине. Машина синхронная; частота синхронизирующих импульсов 180 *кгц*; управление программное. Применена десятичная система счисления. Потребляемая мощность 220 *вт*. 2) Состав слова. Слово состоит из 6 десятичных цифр; каждая десятичная цифра изображается четырьмя двоичными знаками. Код 1—2—4—8. Один десятичный разряд используется как кодовый знак, цифровая часть слова состоит из пяти десятичных цифр. 3) Состав команд. 2 знака — управление, 3 знака — адресная часть. Разных команд 29. 4) Запоминающее устройство — скоростной магнитный барабан емкостью 1000 слов, время выборки 1,66 мсек., число оборотов 18 000 в 1 мин., имеет 42 головки, размер барабана 90 *мм*×70 *мм* (диаметр). 5) Время выполнения арифметических действий (средние величины, в которые включается время ожидания): сложения и вычитания 3,4 мсек., умножения 4,8 мсек., деления 6,4 мсек., сравнения 1,7 мсек. 6) Входное и выходное устройство. Стандартный телетайп; быстродействующее вводное устройство для считывания с перфорированной ленты. 7) Основные детали: 470 транзисторов, 4400 германиевых диодов, 31 электронная лампа.

**1 В350. Об электронно-вычислительной машине ЭТЛ МАРК IV (ETL MARK IV) на полупроводниковых триодах.** Такахаси Сигэру. «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 90—96 (японск.)

**1 В351. Малогабаритная универсальная цифровая вычислительная машина на магнитных (ферритовых) элементах ЛЭМ-1.** Machmudov U. A. LEM-1, small size general purpose digital computer using magnetic (ferrite) elements. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, 2, № 10, 3—9 (англ.)

Перевод из журнала «Радиотехника» (РЖМат, 1960, 11034).

**1 В352. Универсальная электронно-вычислительная машина FACOM-222—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 154 (японск.)

**1 В353. Финансовая электрическая счетная машина NEAC-2201—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 129—131 (японск.)

**1 В354. Электронная вычислительная машина NEAC-2203.** Дэкава Юдзиро. «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 108—112 (японск.)

**1 В355. О параметрической электронной вычислительной машине Musasino-1.** Киясу Дзэнъити. «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 83—89 (японск.)

**1 В356. Проект цифровой вычислительной машины HIPAC Мк-I.** Каясима Кодзо, Такада Сёхэй, Симада Сёдзо. «Дэнси когё», 1959, 8, № 9, 97—107 (японск.)

**1 В357. Цифровая электронная вычислительная машина HITAC-102—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 152 (японск.)

**1В358. Промышленная электронная вычислительная машина типа H-I—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 153 (японск.)

**1 В359. Управленческая электронная вычислительная машина TOSBAC-IIID—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 150—151 (японск.)

**1 В360. Электронная вычислительная машина TOSBAC-2103 компании Токио Сибаура Денки.** Ямана ка Кадзумаса. «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 113—120 (японск.)

**1 В361. Электронная вычислительная машина UNIVAC—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 155—156 (японск.)

**1 В362. Электронная вычислительная машина Burroughs—.** «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 156 (японск.)

**1 В363. Программное испытание большой электронной вычислительной машины. IBM-704.** Фудзивара Сигэнага, «Дэнси когё, Electronician», 1959, 8, № 9, 132—139 (японск.)

**1 В364. Цифровая вычислительная машина с программным управлением с новым построением команд.** Jaworski Wojciech. Programowana maszyna cyfrowa z nową budową instrukcji. «Arch. automat. i telemech.», 1958, 3, № 3, 79—121 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается возможность создания электронной вычислительной машины с кодом, в котором исходные данные могут составлять часть команды. Отмечается, что новое построение команд влечет за собой изменение структуры вычислительной машины и существенные изменения в программировании. Предлагаемая система команд уменьшает количество операций ввода и пересылки в запоминающее устройство машины. Приведены упрощенная блок-схема будущей машины, перечень команд, список употребляемых терминов, примеры. Библ. 54 назв. В. Л. Евтеев

**1 В365. Октальные диаграммы, имеющие двоичную основу и их применимость при создании логики вычислительной машины.** Li Shu-Tien. Octal diagrams of binary conception and their applicability to computer design logic. «Communs Assoc. Comput. Mach.», 1959, 2, № 9, 28—29 (англ.)

Изложен способ представления двоичных чисел посредством октальных диаграмм, который был изобретен китайскими учеными около 5000 лет назад. В октальной диаграмме двоичная цифра 1 изображается сплошной горизонтальной линией, цифра 0 — двумя горизонтальными линиями с разрывом между ними. Числа от 0 до 7 изображаются посредством трех горизонтальных линий, располагаемых в определенной последовательности сверху вниз; например, цифра 3 изображается сначала горизонтальной линией с разрывом, ниже которой располагаются две сплошные линии. Отмечается возможность использования элемента с двумя устойчивыми состояниями для выражения сплошной (1) и разрывной (0) линий, а также возможность выполнения арифметических действий сложения и вычитания, применяя указанное представление чисел. И. А. Ефимов

**1 В366. Логический контроль ввода информации экономит время вычислительной машины.** Hammel David. Logical control of sampling saves computing time. «Control Engng», 1959, 6, № 3, 135—137 (англ.)

Экономия времени достигается за счет того, что коды, не содержащие «признака важности», не записываются в вычислительную машину. Коммутатор входных сигналов в этом случае может ускоренно переходить к следующему устойчивому состоянию. Предполагается, что выработка «признака важности» должна производиться в самом источнике информации. М. Д. Хахин

**1 В367. Логическая схема простой универсальной вычислительной машины.** Франкел Стэнли П. (Frankel S. P.). «Математика. Период. сб. перев. ин. статей», 1958, 2, № 6, 137—154

См. РЖМат, 1958, 5221.

**1 В368. Об одной схеме типового арифметического устройства параллельного действия.** Дашевский Л. Н., Погребинский С. Б. «Сб. тр. Вычисл. центра. АН УССР», 1958, вып. 3, 32—44

Рассматриваются общие принципы построения параллельного арифметического устройства для специализированных однопрограммных цифровых вычислительных машин с применением двоичной системы счисления, фиксированной запятой, ограниченного количества разрядов и симметричных триггеров в качестве логических и запоминающих элементов. Приводятся блок-схемы триггера с логическим счетным входом, сдвигающего регистра на таких триггерах и одного разряда параллельного сумматора. Описывается блок-схема арифметического устройства и методика производства основных арифметических операций. Суммирование производится в два такта, когда во время первого такта находится сумма по модулю 2, а во втором также эта сумма используется для определения необходимости реализации переносов. Арифметическое устройство состоит из сумматора без сдвигов и двух регистров, на одном из которых осуществляется сдвиг вправо, а на другом — влево. Основной особенностью описываемого арифметического устройства является, по утверждению авторов, то, что при реализации умножения и деления сдвиг и сложение выполняются в разных устройствах, что дает возможность совместить их во времени и достичь ускорения умножения и деления. Отмечаются также отсутствие динамических устройств запоминания переносов в сумматоре и регистрах и отсутствие сдвигов в сумматоре, что снижает требуемую частоту работы элементов. Описывается экспериментальный 8-разрядный макет рассматриваемого арифметического устройства на лампах, обеспечивающий при рабочей частоте 200 *кгц* 20 000 умножений в 1 сек.

Б. И. Стрелков

**1 В369. Арифметическое устройство специализированной электронной счетной машины СЭСМ-1.** Рабинович З. Л. «Сб. тр. Вычисл. центра. АН УССР», 1958, вып. 3, 18—31

Рассматривается методика проведения операций в последовательном арифметическом устройстве и приводится описание схемы арифметического устройства специализированной цифровой вычислительной машины СЭСМ-1, служащей для решения систем линейных алгебраических уравнений методом Зайделя. Каждый цикл арифметических операций состоит из умножения двух чисел и сложения полученного произведения с суммой ранее подсчитанных произведений, которая в процессе подсчета хранится в арифметическом устройстве. Полная сумма передается оттуда на магнитный барабан. Последовательный сумматор арифметического устройства принципиально не отличается от известных ранее. В машине применена двоичная система счисления с фиксированной запятой. Располагаемое число разрядов при умножении 28, а при сложении 32. Б. И. Стрелков

**1 В370. Сверхбыстродействующее множительное устройство.** Rose Alan. Un multiplicateur ultrarapide. «C. r. Acad. sci.», 1959, 248, № 16, 2271—2273 (франц.)

Приводится громоздкая схема двоичного множительного устройства, сводящая время выполнения умножения $N$-разрядных чисел к $W = [\log_2 N] + 1$ тактам сложения. Пусть перемножаются числа: $x = x_N\, x_{N-1} \ldots x_1$

и $y = y_N y_{N-1} \ldots y_1$. Произведение обозначим через $z = z_{2N} z_{2N-1} \ldots z_1$. Выполняется следующее неравенство: $\min(k, N) - \max(1, k-N+1) < N (k=1, 2, \ldots, 2N-1)$. Положим, что $\sum_{i=\max(1,k-N+1)}^{\min(k,N)} x_i y_{k-i+1} = \sum_{i=1}^{W} 2^{i-1} w_{ik}$. Тогда $z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} 2^{i+j-2} x_i y_j = \sum_{i=1}^{W} 2^{i-1} \left( \sum_{k=1}^{2N-1} 2^{k-1} w_{ik} \right)$. Отсюда $v_i = \sum_{k=1}^{2N-1} 2^{k-1} w_{ik}$ и $z = \sum_{i=1}^{W} 2^{i-1} v_i$. Проблема сводится к сложению $W$ чисел, каждое из которых содержит не более $2N-1$ цифр. Приведенная схема множительного устройства состоит из общего сумматора, $W$ частных сумматоров и большого количества схем типа И, ИЛИ, ИЛИ-ИЛИ и др.

Н. Н. Поснов

**1 В371. Параллельное сложение в цифровых вычислительных машинах: новая быстрая схема переноса.** Kilburn T., Edwards D. B. G., Aspinall D. Parallel addition in digital computers: a new fast «carry» circuit. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 464—466. Discuss., 469 (англ.)

Скорость сложения чисел в вычислительной машине во многом зависит от быстроты выполнения операции переноса. В вычислительных машинах параллельного действия, имеющих тактовый период 6—10 мксек., обычно удается выполнить все переносы за время, не превышающее тактовый период, однако в разрабатываемых машинах, предназначенных для работы с тактовыми периодами порядка 0,1—0,2 мксек., выполнение сложения за один тактовый период становится невозможным, что существенно снижает преимущества параллельного метода работы машин. При сложении многоразрядных чисел маловероятно наличие переносов во всех разрядах, а в работах Принстонского института было установлено, что в среднем максимальная длина последовательного переноса 1 или 0 в сорокаразрядном числе не превышает 5—6 разрядов, и возможно оканчивать период сложения в конце максимального периода переноса, что позволит сократить время переноса в 7 раз. Время, требуемое на переносы, может быть существенно сокращено введением отдельного регистра запоминания переносов, показания которого прибавляются к полному числу лишь при стандартизации числа при посылке его в другую ячейку запоминающего устройства, или проверке по знаку. Эта схема особенно полезна при сложении нескольких чисел или при умножении. Другим методом сокращения времени переносов является сокращение времени каждого переноса, для чего особенно существенным является уменьшение аппаратуры в каждой ячейке переноса. Одним путем является создание вентильных схем, управляемых всеми младшими разрядами числа. Однако сложность этих схем возрастает с увеличением разрядности чисел. Национальное бюро стандартов достигло при помощи таких схем сложения 52-разрядных чисел за 1мксек. Однако, при условии создания быстродействующих переключателей, возможно применение последовательной передачи переносов. Описана логическая и принципиальная схема устройства переносов в двоичном сумматоре, выполненная на полупроводниковых триодах 2N240 и 2N501, использующая 4 триода на разряд, позволяющая передавать переносы с разряда на разряд с задержкой 80 мксек. на 18 разрядов сумматора, которая включает время переключения триодов, задержку в генерировании переключающего напряжения и время передачи сигнала, равное 20 мксек. О. В. Бачин

**1 В372. Вычислительные машины, работающие на частоте 1000 *мгц*.** Maguire Thomas. Computers head for 1.000-Mc operation. «Electronics», 1960, **33**, № 5, 55—59 (англ.)

Диод с переменной емкостью и туннельный диод дают возможность строить вычислительные машины на частоту 1000 *мгц*. Эти диоды в определенном режиме имеют отрицательное сопротивление, что используется для усиления сигналов со скоростью переключения на 2 порядка большей, чем у полупроводниковых триодов. Схемы, собранные на диодах с переменной емкостью, работают в диапазоне частот от 100 *мгц* до 4 *кмгц*. Разрабатываются диоды, имеющие частоту отсечки 150 *кмгц*. Приводится схема, работающая по принципу фазовой синхронизации, которая может быть использована в качестве запоминающего элемента или усилителя. Схема построена по трехтактному принципу. Тактовые импульсы следуют с частотой 30 *кмгц*. Дана схема генератора с фазовой синхронизацией для получения тактовых сигналов. Генератор имеет к. п. д. меньше 1% и потребление мощности в канале около 100 *мвт*. Рассматриваются различные методы включения туннельного диода для получения логических и усилительных схем. Время переключения туннельного диода 1 ммксек. Диод может использоваться и как элемент для запоминающего устройства. Для управления таким запоминающим устройством требуются значительные мощности, которые можно получить использованием транзисторов или сочетаний туннельный диод—транзистор. Время выборки устройства до 10 ммксек. Для вычислительных машин на туннельных диодах испытывались схемы: однотактного порогового вентиля, состоящего из одного туннельного диода, питаемого от импульсного источника; балансного или симметричного порогового вентиля со своим источником питания триггерного типа; инверторного устройства, содержащего 2 диода и сопротивления с питанием от импульсного генератора тока; запрещающе-избирательного устройства, имеющего более двух устойчивых состояний; сумматора на трех диодах и сопротивлениях. Схемы на туннельных диодах строятся по трехфазному принципу с перекрытием фаз. Передача информации от такта к такту происходит в момент возбуждения передающего и принимающего тактов. Схемы выполняют функции усиления, формирования и синхронизации. Дана схема одного разряда арифметического устройства с циклом работы 1 мсек. Все логические схемы выполнены на динамических элементах. В настоящее время стали применяться в качестве переключающих и запоминающих элементов многослойные криотроны. Плотность их размещения составляет около 20 000 активных элементов на 1000 $см^2$. Свыше миллиона таких элементов требуют контейнера с жидким гелием объемом около 2900 $см^3$. Постоянная времени многослойных криотронов 1 мксек., т. е. в 100 раз меньше, чем у криотронов, получаемых методом осаждения в вакууме. Рассеиваемая элементом мощность равна 5 *мквт*, и активная площадь его составляет $5 \times 10^{-4}$ $см^2$. Схемы на основе криотронов можно получать автоматически за 5 простых операций. Ленточный многослойный криотрон состоит из изолирующей основы, свинцовой и оловянной пленок. Оловянная пленка во время работы меняет свое электрическое состояние. Если пропустить большой ток через управляющую пленку, то под действием магнитного поля ширина проводящего канала получается на много больше, чем ширина оловянной пленки (сверхпроводника). Криотроны, использующие защитную изоляцию, пропускают токи, на порядок большие, чем без защиты. Если в качестве защиты применяется свинцовая пленка, а не обычное стекло, то из-за формы магнитного поля критический ток значительно возрастает. Пленки цилиндрической формы выносят вдвое больший ток, чем пленки в виде плоской ленты. Описан принцип сверхпроводящей защиты. Указывается, что методы монтажа криотронных схем просты. Кратко описывается запоминающее устройство на магнитном диске с временем ожидания 0,3—3 мсек. (зависит от скорости вращения диска) емкостью в 50—60 тыс. разрядов. Проектируется такое же устройство емкостью в 1 млн. разрядов. Описано миниатюрное запоминающее устройство на магнитном

барабане для бортовых вычислительных машин. Устройство работает в диапазоне температур от 125° до —50°С и выдерживает значительные ударные нагрузки. Емкость устройства 300 000 разрядов. На поверхности барабана имеется 122 дорожки, некоторые из них используются в качестве семи циркуляционных регистров. Зазор между полотном барабана и головками удерживается с помощью потока воздуха. Малые размеры и вес магнитных головок позволяют собирать их в блоки (ширина блока 3 *см*) по 25 штук. Головки собраны на пермаллоевом трехслойном сердечнике, на который непосредственно мотается обмотка. Сигналы записи-считывания амплитудой 10—20 *мв* следуют с частотой 546 *кгц*. Библ. 5 назв. В. Д. Савицкий

**1 В373. Микроволновая техника для вычислительных машин — история и введение.**— Meagher R. E. History and introduction — microwave techniques for computers. «IRE Trans. Electron. Comput.», 1959, 8, № 3, 263—265 (англ.)

Для современных вычислительных схем, имеющих сосредоточенные элементы, максимальная частота работы не может превышать 60 *мгц*, ибо их резонансная частота близка к 300 *мгц*. Для повышения этой частоты следует либо переходить к сверхминиатюрным схемам, либо к схемам с распределенными постоянными. Первое серьезное рассмотрение применения микроволновой техники в вычислительных машинах было произведено Эдсоном (W. A. Edson) в Станфордском университете, который предложил ряд элементов и устройств, использующих разные частоты для разных цифр (РЖМат, 1958, 5240, 5241). Предложенное Нёйманом (J. von Neumann) и использованное Гото (E. Goto) и Мурога (S. Muraga) явление параметрического резонанса получило широкое применение в параметронах. В настоящее время фирмой «RCA» разработаны параметроны с тактовой частотой 4000 *мгц*. Большое значение имеет применение в параметронах новых полупроводниковых диодов. Библ. 21 назв. О. В. Бачин

**1 В374. Наносекундные логические схемы, использующие амплитудную модуляцию в трехсантиметровом диапазоне.** Ortel W. C. G. Nanosecond logic by amplitude modulation at X band. «IRE Trans. Electron. Comput.», 1959, 8, № 3, 265—271 (англ.)

Исследуются цифровые логические схемы, в которых информация представляется в виде последовательности радиоимпульсов. Основной логический элемент представляется модулятором, на который подаются радиочастотные сигналы. На два управляющих входа модулятора подаются детектированные сигналы *A* и *B*. 1 и 0 двоичной информации представляются наличием или отсутствием радиоимпульса стандартной амплитуды и длительности. Если используется балансный модулятор, то энергия, подаваемая на него, передается на выход лишь при наличии сигнала на одном из управляющих входов. Если сигнал на основном входе *C* присутствует постоянно, то получается логическая схема ТОЛЬКО—ИЛИ. Если на одном из входов *A* или *B* никогда не бывает сигнала, то получается схема И, а при постоянном наличии сигналов на входах *A* и *C* схема НЕТ. Если же применяется модулятор небалансного типа, то для двух управляющих входов схема будет логической схемой ИЛИ. Обычно в качестве модулятора используется дифузел из четырех волноводов. Одна ветвь используется для ввода сигнала, одна — для вывода, а две ветви, оканчивающиеся полупроводниковыми диодами, служат в качестве вводов управления. Если проводимости диодов равны между собой как в проводящем, так и непроводящем направлениях, то модулятор будет балансным. Управление диодами осуществляется с помощью постоянного смещения и детектированного другим диодом радиочастотного входного сигнала. При соответствующей входной мощности схема не реагирует на малые сигналы и ограничивает большие. Если на основной вход подаются тактовые импульсы, то возможно формирование ослабленных импульсов управляющих входов. В исследовавшихся схемах используется несущая частота 11 000 *мгц*, что позволяет работать с частотой повторения импульсов до 1000 *мгц*. Однако вследствие ослабления выходного сигнала на 20 *дб*, после каждой логической схемы приходится ставить усилитель на лампах бегущей волны, который вводит задержку в 10 *нсек*., поэтому при тактовых частотах свыше 100 *мгц* необходимо подчинять логический расчет условию, что задержка между каскадами больше тактового интервала. Для исследования возможностей таких схем построено устройство, перемножающее два 8-разрядных двоичных числа. Процесс умножения занимает больше тактовых интервалов, чем в обычном последовательном умножающем устройстве, но вследствие большой тактовой скорости получается выигрыш во времени. 8-разрядные множитель и множимое вводятся в устройство параллельно ручным переключателем. В каждом цикле умножения множитель преобразуется в последовательную форму и передается в генератор множителя, начиная с младших разрядов. Выход из генератора осуществляется 5 *нсек*. импульсами с тактовым расстоянием 100 *нсек*. Эти импульсы вводятся в генератор частных произведений, управляемый кодом множимого. После поступления импульса из генератора множителя генератор частных производных передает последовательный код множимого, начиная со старших разрядов с периодом 6,25 *нсек*. Эти частные произведения вводятся в накопитель циркулярного типа, который образует и запоминает сумму. Так как последовательные частные произведения должны быть сдвинуты на один тактовый период, то время циркуляции в накопителе 106,25 *нсек*. Наиболее короткая межкаскадная задержка в накопителе 50 *нсек*. В статье описывается схема накопителя и особенности его логического расчета, связанные с тем, что межкаскадная задержка больше, чем тактовый период циркулирующей в нем информации. Этот накопитель, как и обычно, состоит из двух полусумматоров и схемы ИЛИ, однако задержки в цепях связи расположены другим способом и требуется вводить частное произведение старшими разрядами вперед. Умножение в такой схеме требует вдвое большего числа тактовых интервалов. Испытанная схема, работая на тактовой частоте 160 *мгц*, перемножала два 8-разрядных числа за 1,6 *мксек*. Измерения показали, что минимальное время межкаскадной задержки можно снизить до 12 *нсек*., а тактовый период до 2 *нсек*., благодаря чему время умножения сократится в 4 раза. В статье разбираются теоретические основы работы логических схем, а также вопросы ослабления по мощности в применяемых волноводных узлах. О. В. Бачин

**1 В375. Использование микроволновых параметрических генераторов субгармоник для цифровых вычислительных схем.** Sterzer Fred. Microwave parametric subharmonic oscillators for digital computing. «Proc. I. R. E.», 1959, 47, № 8, 1317—1324 (англ.)

Представлен один из вариантов конструкции генератора субгармоник для выходной частоты 2000 *мгц*. Роль нелинейной реактивности выполняет точечный терманиевый диод, смещенный в обратном направлении. Фазе выходного сигнала может быть придан смысл нуля или единицы и таким образом генератор субгармоник может выполнять функции запоминающей ячейки на один двоичный разряд или усилителя. Быстродействие таких схем определяется длительностью процессов срыва и нарастания колебаний. Экспериментально получен срыв колебаний за 1,5 *нсек*. Описаны принципы построения на генераторах субгармоник логических элементов И, ИЛИ, НЕ, а также одноразрядного двоичного полусумматора, сдвигающего

регистра и пересчетной схемы. Для пересчетной схемы получено разрешающее время 8 нсек. И. К. Волков

**1 В376. Подход к микроминиатюрным печатным системам.** Buck D. A., Shoulders K. R. An approach to microminiature printed systems. «Proc. East. Joint Comput. Conf.», Philadelphia, Pa, 1958, NT-114. New York, 1959, 55—59 (англ.)

В ближайшем будущем вычислительные машины в целом или их отдельные части будут выполняться единым процессом. Наиболее обещающим методом в этом смысле является вакуумное осаждение электродов на блоки чистого кремния или германия с последующей диффузией материала электродов в блок для образования переходов между областями с разным типом проводимости; вакуумное осаждение магнитных материалов и проводников для образования запоминающих устройств и вакуумное осаждение сверхпроводящих переключающих и запоминающих устройств. Вакуумное осаждение производится через соответствующую маску при вакууме $10^{-6}$ *атм*. Путем изменения источника осаждения и маски можно чередовать осаждение проводящих и непроводящих материалов для образования схем. Ширина таких проводников имеет порядок размеров отверстий в маске и практически составляет 0,025 *мм*. Одним из возможных методов получения печатных проводников шириной 0,1 *мк* является метод травления. Технология производства микроминиатюрных схем в настоящее время достигла хороших практических результатов. Г. Х. Новик

**1 В377. Предстоящая революция в технологии изготовления цифровых вычислительных машин.** Rice R. The impending revolution in computer technology. «Proc. East. Joint Comput. Conf.», Philadelphia, Pa, 1958. NT-114. New York, 1959, 43—46 (англ.)

Известно, что использование реле в качестве элементов логических схем цифровых вычислительных машин позволяет получить удельное быстродействие (быстродействие на элемент) до 1000 решений в 1 сек. Релейная логика требует значительного объема машины и большого количества соединительных проводов. Значительное повышение быстродействия было получено при использовании электронных ламп в качестве элементов логических схем. Удельное быстродействие может достигать 4 000 000 логических операций в 1 сек. При этом, однако, объем машин остается большим и количество проводных соединений с учетом наличия пассивных элементов также велико. Дальнейшее увеличение быстродействия (удельное быстродействие до 40 000 000 логических операций в 1 сек.) при значительном снижении объема получено путем использования транзисторов. При этом, однако, число проводных связей не уменьшается значительно, если не применены печатные схемы. Наряду с прогрессом развития элементов машин, наблюдается развитие сложности самих логических схем, увеличение объема запоминающих устройств и повышение скорости, благодаря этому количество соединительных линий в вычислительных машинах имеет тенденцию к увеличению. Снижение количества соединений и повышение габаритов машин может быть получено за счет применения криотронных элементов. Так, триггер на криогенных элементах занимает не более 3 *мм*. Дальнейшее изменение технологии производства вычислительных машин пойдет по линии микроминиатюризации их элементов, физического объединения элементов хранения, переключения и передачи информации. Г. Х. Новик

**1 В378. Система управления для быстродействующей вычислительной машины.** Ord G. A system of control for a fast computer, «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, № 29, 464. Discuss., 469 (англ.)

Очень краткое резюме доклада о системе управления, позволяющей составлять операции машины в виде последовательности более элементарных операций и отличающейся от системы, предложенной ранее Уилксом, Ренвиком и Уилером. Система построена на учете следующих фактов: 1) все операции сдвига, подсчета, передачи и обмена между регистрами арифметического устройства (а. у.) занимают одно и то же время (около 200 нсек.) и составляют подавляющее большинство операций, производимых а. у.; 2) в четырех из пяти случаев операции подобного рода следуют друг за другом в определенной последовательности. Система управления состоит из сдвигового регистра с «единицей», передвигаемой на один разряд каждые 250 нсек., и групп транзисторных переключателей, подключенных к каждому разряду сдвигового регистра и управляемых кодом команды. Код команды управляет таким количеством переключателей, которое соответствует числу элементарных последовательно выполняемых операций, но только один из переключателей, подключаемых к выходу какого-либо разряда является включенным в определенный момент времени. Выходы переключателей подсоединены к схемам, которые вырабатывают управляющие импульсы для различных частей машины. Изменение регулярной последовательности сигналов на выходе сдвигового регистра производится путем изменения положения единицы в определенный момент времени. Для операций, которые требуют большего времени, чем интервал между регулярными сдвигами, предусмотрено запрещение регулярного сдвига. Так как транзисторные переключатели подготавливаются сразу же после установления кода команды и на все время выполнения определенной последовательности элементарных операций, составляющих команду, то время их подготовки может доходить до 0,5 мксек. без заметного снижения скорости всей последовательности. Скорость выполнения последовательности элементарных операций определяется в первую очередь скоростью сдвига и может составлять 4 или 5 *мгц*. В. И. Смирнов

**1 В379. Быстродействующее диодно-конденсаторное запоминающее устройство на транзисторах с произвольной выборкой.**—. Conway A. C. A fast random-access diode-capacitor store using transistors, «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, Suppl. № 16, 657—662. Discuss., 698—701 (англ.)

Описано диодно-конденсаторное запоминающее устройство небольшой емкости, которое дополняет основное оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках в универсальной вычислительной машине, выполненной на полупроводниках. Емкость диодно-конденсаторного устройства 64 кода. Длина кода 38 двоичных разрядов. Длительность цикла считывания-записи равна 4 мксек. Емкость основного запоминающего устройства 4096 кодов, длительность цикла обращения к устройству 12 мксек. Логические схемы вычислительной машины выполнены на диод-транзисторных элементах со связями по постоянному току. Основная частота тактирующих импульсов равна 1 *мгц*, принцип работы узлов асинхронный. Выходные каскады логических элементов выполнены по схеме с заземленным эмиттером. Длительность переднего фронта выходных сигналов не более 0,15 мксек. Уровни сигналов ограничены значениями ±3 *в*. В диодно-конденсаторном устройстве для запоминания одного двоичного знака используются конденсатор и два диода. Один вывод конденсатора соединяется с анодом одного диода и катодом второго. Второй вывод конденсатора связан с разрядной шиной. Свободные катод одного диода и анод второго соединяются с шинами выборки данного адреса. К разрядной шине присоединены все конденсаторы данного разряда конденсаторной матрицы. Шина связана со входом усилителя регенерации данного разряда, который усиливает считываемый сигнал, фиксирует его на выходном регистре и производит восстановление заряда емкости в данном разряде. Длительность импульса регенерации равна 0,4 мксек. Шины выборки адреса являются выход-

ными шинами диодно-трансформаторного дешифратора выборки. Дешифратор разделен на три одинаковых секции для уменьшения максимальной амплитуды зарядного тока конденсаторов. Число ячеек памяти, присоединенных в параллель к шине выборки одной секции, не превышает 13 и триоды на входах секций дешифратора не перегружены. Амплитуда зарядного тока по отдельной шине секции ограничена 100 *ма*, зарядный ток отдельного конденсатора равен ~7 *ма*. Величина емкости конденсатора 200 *пф*, максимальное время заряда 1,5 мксек. Начальное напряжение заряженного конденсатора ±2 *в*, допустимый выходной сигнал сохраняется при уменьшении заряда до ±1 *в*. Заряд стекает через обратные сопротивления диодов. Диоды с золотым контактом отбираются по обратному току: $i_{обр} \leqslant 0{,}7$ *мка* при $u_{обр}=8$ *в* и $i_{обр} \leqslant 0{,}5$ *мка* при $u_{обр}=4$ *в*. Эти параметры определяют время, через которое заряд емкости должен быть восстановлен: 6 мсек. при температуре 20°С, 1,5 мсек. при 38°С. Период цикла регенерации установлен в 1,5 мсек. Приведены и описаны узлы считывания и записи усилителя регенерации, схема трехсекционного диодно-трансформаторного дешифратора в цепях выборки кодов. Выведена формула для времени саморазряда емкости через обратные сопротивления диодов. Приведены принципиальные схемы и описание работы каскада возбуждения трансформаторной матрицы и каскада выборки кода. Указаны уровни напряжений, требования к межкаскадным трансформаторам. В схемы введены детали и цепи, которые четко определяют амплитуды импульсов напряжения различной полярности на выходах схем. Схемы собраны на панелях с печатным монтажом. Общая потребляемая мощность ~600 *вт*. При опытной эксплуатации устройства обнаружена высокая надежность работы. Е. Ф. Бережной

**1 В380. Схемы на полупроводниковых триодах для ферритового запоминающего устройства.** Padwick G. C., Cain A. L. Transistor circuits for a ferrite store. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, **B106**, Suppl. № 16, 675—684. Discuss., 698—701 (англ.)

Описаны схемы запоминающего устройства на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, работающего по принципу совпадающих токов. Схемы выполнены на полупроводниковых приборах. Основным элементом схем генераторов тока для куба памяти является мощный высокочастотный триод типа ОС-23. Коллекторный импульсный ток триода порядка 350 *ма*, средняя величина амплитуды коллекторного напряжения 24 *в*, время нарастания импульса тока на коллекторе ⩽0,5 мксек. Триод в генераторе тока включен по схеме с эмиттерной стабилизацией, стабильность полутока выборки обеспечивается в пределах 5%. Для куба памяти могут использоваться сердечники трех типов, импульсные параметры которых приводятся. Описаны рабочие характеристики куба из сердечников типа А(FX1508) с параметрами: наружный диаметр 2 *мм*; оптимальный ток при работе в режиме совпадающих токов $I_m=700$ *ма*; время перемагничивания под действием оптимального тока $T_s=1{,}5$ мксек.; минимальный сигнал на одновитковой выходной обмотке при перемагничивании сердечника 0,09 *в*. Куб памяти состоит из 40-разрядных плат, содержащих $32\times32=1024$ знака каждая. Время нарастания полутока выборки 0,4 мксек., оптимальная амплитуда 350 *ма*. Работа системы не нарушается при изменении полутоков в пределах 230÷425 *ма*. Выборка адреса производится дешифраторной матрицей, управляемой полупроводниковыми триодами. Ток выборки подается в разрядные платы через плоскостные диоды типа 0А10 или диоды с золотым точечным контактом 0А5, обладающие малым прямым падением напряжения. Описаны два способа выборки триодов на входах дешифраторной матрицы. В первом для выборки и возбуждения триодов использован дешифратор на магнитных сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса. Во втором на базе выбираемых триодов подаются потенциалы от диодной матрицы с диодами 0А10. С каждой разрядной платой куба связаны усилитель считывания, схема записи и каскад формирования знакового импульса. Сигнал на считывающих проводах складывается из четырех составляющих: полезного сигнала от 40 переключаемых сердечников, сигнала помехи от 1280 полувыбранных сердечников, сигнала по воздуху между проводами выборки и считывания и падения напряжения на активном сопротивлении проводов. Приведен ход этих составляющих во времени. Выходной импеданс провода считывания платы ~5 *ом*. Двуполярное напряжение от провода считывания через согласующий трансформатор поступает на диодную схему выпрямления; на вход усилителя считывания поступает однополярный положительный импульс. Выход усилителя связан с каскадом формирования типа блокинг-генератора, который формирует импульс для логических цепей машины. Запись в куб «1» или «0» выполняется путем пропускания или непропускания через разрядную плату знакового импульса. Знаковый импульс равен по амплитуде импульсам выборки $X$ и $Y$ и имеет длительность, превышающую длительность импульса записи. При прохождении он блокирует импульс записи и выбираемый сердечник платы после такта записи остается в том же положении, что и после такта считывания. Если знаковый импульс не проходит, сердечник переводится в другое состояние. Таким же образом производится восстановление кода в запоминающем устройстве после его считывания. Е. Ф. Бережной

**1 В381. Фотопластины для долговременной памяти электронных переключающих систем обрабатываются автоматически.**— Plates for ESS memory processed automatically. «Bell Labs Res.», 1959, **37**, № 11, 435—436 (англ.)

Сообщается о разработке в лаборатории «Белл» автоматического метода экспонирования и проявления фотопластинок для долговременной памяти экспериментальной электронной переключающей системы. Долговременная память (накопитель с бегущим лучом) запоминает справочную информацию и команды на позитивной фотопленке в виде крошечных светлых точек диаметром 0,127 *мм*. Расстояние между точками 0,0635 *мм*. 17 площадок, каждая из которых имеет площадь 6,4516 $см^2$, составляют одну полную фотопластинку. Память на 1 млн. разрядов содержит 4 таких пластины. Луч электронно-лучевой трубки, фокусируемый системой линз, движется по одной из площадок (другие в это время закрыты затворами), останавливаясь на короткое время в тех местах, где необходимо оставить метку. Автоматическое управление этой операцией позволяет полную фотопластинку, содержащую 550 000 меточных положений, экспонировать за 3 мин. После этого пластинки автоматически вводятся в защищенный от пыли и света контейнер для проявления и фиксирования по заранее выбранной программе, которая может включать до 15 различных операций. Растворы взбалтываются вдуванием воздуха. После проявления и фиксирования пластинки тщательно промываются, сушатся в отфильтрованном воздухе, а затем поступают в контейнер устройства памяти. Ю. Т. Печатников

**1 В382. Запоминающее устройство на магнитных дисках с произвольной выборкой.** Glover A. C. A magnetic disk, random access memory. «J. Brit. Instn Radio Engrs», 1960, **20**, № 1, 22—24 (англ.)

Описывается конструкция запоминающего устройства большой емкости с записью информации на поверхности магнитных дисков и механической системой произвольной выборки информации. Устройство предназначено для применения в относительно недорогих системах обработки информации коммерческого характера, рассчи-

танных на обработку информации линейным методом. Запоминающее устройство выполнено на 50 алюминиевых дисках, вращающихся на вертикальной оси; обе стороны каждого из дисков покрыты окисью железа и используются для нанесения информации. Сторона содержит 100 концентрических дорожек; на каждой дорожке может быть записано 500 буквенно-цифровых знаков, изображаемых 8 двоичными разрядами. Знаки на дорожке группируются в 5 групп по 100 знаков в группе. Общая емкость устройства составляет $5 \cdot 10^6$ буквенно-цифровых знаков ($40 \cdot 10^6$ двоичных знаков). Выборка производится двумя магнитными головками, которые подводятся механически к требуемой дорожке выбранного диска. Максимальное время ожидания группы из 100 знаков равно 0,8 сек., минимальное 0,15 сек. Скорость вращения дисков составляет 1200 об/мин., диаметр диска равен 609,6 *мм*, толщина 2,54 *мм*, расстояние между дисками 7,62 *мм*. Запись двоичной информации выполняется по системе «без возврата к нулю». Плотность записи на внутренних дорожках составляет 4 двоичных знака на 1 *мм*, на внешних 2,16 двоичных знака на 1 *мм*. Магнитная головка содержит две различные магнитные цепи; одна цепь и ее воздушный зазор обеспечивают стирание информации, другая служит для считывания и записи данных. Зазор стирания длиннее, чем зазор цепи считывания — записи. Это снижает требования к точности радиального расположения головок для выбора нужной дорожки. Схемы усилителей считывания и записи одинаковы, но в усилитель считывания введена автоматическая регулировка усиления для компенсации изменения амплитуды выходного сигнала при изменениях скорости вращения и плотности записи. Воздушный зазор между плоскостью диска и головкой составляет 25 *мк*, он поддерживается воздушной подушкой, которая образуется при нагнетании воздуха в трубопроводы, окружающие магнитную головку. Механизм перемещения головок и выборки информации приводится в действие магнитными муфтами, передающими движение от двух дисков, непрерывно вращающихся в противоположных направлениях. Каждая из муфт может управлять вертикальным или радиальным движением каретки с магнитными головками. Механизм имеет систему механической блокировки, исключающую возможность одновременных вертикальных и радиальных движений. В запоминающем устройстве вместо синхронизации синхроимпульсами с кодовых магнитных дорожек использован способ автономной синхронизации. Для этого в систему введены два генератора импульсов, сблокированных таким образом, что когда один из них включен, другой выключен. В процессе записи один из них работает непрерывно и обеспечивает синхронизацию. В процессе считывания каждый считанный двоичный знак выключает этот генератор и включает другой. Выходные данные сигналы генераторов смешиваются и образуют тактовые импульсы для операции считывания. В результате серия тактовых импульсов повторно синхронизируется с каждым вновь считываемым знаком. Способ автономной синхронизации значительно снижает требуемую точность аксиальной установки головок. Точность радиальной установки головок, обеспеченная в системе, позволяет удвоить количество дорожек на одной стороне диска и увеличить объем запоминающего устройства до $8 \cdot 10^7$ двоичных знаков. Приведена функциональная схема механизма произвольной выборки информации путем перемещения головок, а также блок-схема управления механизмом выборки.

Е. Ф. Бережной

**1 В383. Низкотемпературные элементы памяти.** Rhoderick E. H. Low temperature storage elements. «J. Brit. Instn Radio Engrs», 1960, **20**, № 1, 37—40 (англ.)

Описаны устройство и принцип действия запоминающего элемента, который работает в области низких температур и использует явление сверхпроводимости металлов и сплавов и разрушение сверхпроводимости магнитным полем тока. Элемент Крауе (Crowe) представляет собой пленку сверхпроводящего металла, нанесенного на подложку из диэлектрика путем вакуумного испарения. Используя трафареты, на подложке получают два свободных от пленки круговых сегмента, разделенных тонкой перемычкой, проходящей по диаметру элемента. На перемычку наносят слой изоляции, поверх которой помещают провод, идущий вдоль перемычки. С другой стороны перемычки помещают второй провод. Один из проводов образует обмотку переключения элемента, другой — обмотку считывания. Если перемычка находится в сверхпроводящем состоянии, она создает идеальный экран между обмотками переключения и считывания. Логическое состояние ячейки определяется направлением тока сверхпроводимости, протекающего по перемычке и замыкающегося вокруг сегментов. Ток сверхпроводимости создает в перемычке магнитное поле, напряженность которого меньше критической. Если в обмотку переключения пропущен ток, магнитное поле которого увеличивает напряженность поля перемычки до критического значения, состояние сверхпроводимости разрушается. Ток в перемычке начинает уменьшаться, в результате выделения джоулева тепла температура перемычки возрастает; это понижает критическое значение тока сверхпроводимости, и процесс, развиваясь, заканчивается полным прекращением тока через перемычку. Скорость переключения элемента в другое состояние определяется временем охлаждения перемычки до температуры, при которой критический ток становится больше тока переключения. Это время называется временем тепловой релаксации и зависит от материала перемычки и подложки. Если сверхпроводником является свинец, время тепловой релаксации для подложки из стекла равно 400 *нсек*., для подложки из слюды 100 *нсек*. Элемент из оловянной пленки на подложке из слюды имеет время переключения порядка 10 *нсек*. Порядок величины переключающего тока составляет 50 *ма*, выходной сигнал около 5 *мв*. Критическая температура олова равна 3,7° К, поэтому элементы помещаются в жидкий гелий, находящийся под давлением ниже атмосферного (температура кипения гелия при 760 *мм* рт. столба равна 4,2° К). Преимущества в скорости работы, технологии изготовления, малогабаритности элементов могут окупать необходимость наличия в вычислительных устройствах установки для ожижения гелия. Элементы имеют малые размеры (в 1 $см^3$ можно разместить 35 элементов диаметром 1 *мм*) и требуют сравнительно малых переключающих токов. Полностью отсутствуют помехи при переключении. Энергия, выделяемая при переключении одного элемента, имеет величину порядка $10^{-10}$ *дж*. Наиболее сложна проблема соединения матриц низкотемпературных элементов с цепями выборки и логическими цепями, работающими при обычных температурах. Перспективно создание быстродействующих активных низкотемпературных элементов, основанных на процессах лавинного пробоя в полупроводниковых диодах и триодах или на идее криотрона.

Е. Ф. Бережной

**1 В384. О запоминающем устройстве машины ГИФТИ.** Гончаров А. М., Тарантович А. С. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика», 1958, № 2, 156—168

Описывается запоминающее устройство на магнитном барабане математической машины, построенной в Исследовательском физико-техническом институте при Горьковском университете, особенностью которого является то, что и долговременное запоминающее устройство («обычное з. у.») и оперативное з. у. («специаль-

ное з. у.») выполнены на магнитном барабане. Магнитный барабан машины имеет диаметр 240 *мм*, длину образующей 200 *мм* и вращается со скоростью 6000 об/мин. Обычное з. у. машины размещено на 31 дорожке барабана и предназначено для хранения 1984 32- или 992 64-разрядных кодов. Специальное з. у. в виде 16 регистров с рециркуляцией размещено на 16 дорожках барабана. На каждом регистре может быть записано одно 94- или два 32-разрядных кода. На магнитном барабане расположено также 6 регистров с рециркуляцией, используемых в центральном устройстве управления и в арифметическом устройстве машины, и 4 дорожки с синхронизирующими импульсами. Барабан покрыт пленкой ферролака 101*а* — толщиной 30—50 *мк*, разработанного во Всесоюзном научно-исследовательском институте звукозаписи. Запись единиц и нулей производится положительным и отрицательными импульсами через головку, имеющую одну обмотку, причем при записи нуля посылается более мощный импульс. Для чтения используется та же магнитная головка. Рабочий зазор составляет 30—40 *мк*. Длина магнитного пути в головке 4 *мм*, ширина щели 60—70 *мк*, толщина пакета пишущей части 250—270 *мк*, число витков 100—200, ток перемагничивания 300 *ма*, э. д. с. чтения на головке 100 *мв*. Усилители записи и чтения выполнены на лампах 6Н1П. Рассматривается работа схем записи, чтения и коммутации обычного и специального з. у. Описан разработанный в ГИФТИ метод полуавтоматической записи на дорожку барабана тактовых импульсов. Источником импульсов при этом является внешний генератор, частота которого может регулироваться в некоторых пределах. Специальный счетчик непрерывно считает импульсы этого генератора, причем на его выходе появляется каждый $N$-й импульс. $N$ — количество импульсов, которое необходимо записать по окружности барабана. На дополнительную дорожку любым способом наносится одиночный импульс. Частота генератора настраивается таким образом, чтобы частота следования импульсов с выхода счетчика совпала с частотой одиночного импульса. После этого включается вспомогательная схема, пропускающая на схему записи импульсы с генератора. Такая запись занимает не более получаса времени и оказывается удобной при экспериментальной работе, позволяя быстро переходить с одной плотности записи на другую.

А. Н. Чуйкин

**1 В385. Симметричный регистр с дополнением.** Dańda Jerzy. Symetryczny rejestr z dopełnieniem. «Biul. zakł. aparat. mat. PAN», 1958, **P1**, № 5, 20—28 (польск.; рез. англ.)

Описывается построение и принцип действия двоичного регистра сдвига, названного симметричным регистром с дополнением. Каждая ячейка регистра обладает удвоенной емкостью — для числа и его дополнения. Дается принципиальная схема элемента регистра, используемого в электронной вычислительной машине XYZ-1.

В. Л. Евтеев

**1 В386. Улучшенные цифровые цепи на магнитных сердечниках.**—. Improved magnetic core digital circuitry. «Nat. Bur. Standards Techn. News Bull.», 1959, **43**, № 10, 186—187 (англ.)

Описан модифицированный цифровой магнитный усилитель, разработанный в исследовательском центре в Кембридже. Усилитель обладает улучшенной стабильностью, большим коэффициентом усиления и более быстрым дополнительным усилителем. В качестве усилителей сигналов, получаемых с диодных логических схем, вместо ламп и транзисторов используются трансформаторы на магнитных сердечниках, имеющих два насыщенных состояния. Усилитель состоит из двух каскадов: собственно усилителя и дополнительного усилителя. Каждый каскад содержит трансформатор, диодно-реостатные цепи и эмиттерный повторитель. На базу транзистора эмиттерного повторителя от логической диодной схемы И — ИЛИ подаются сигналы, требующие усиления. На трансформатор подаются два противофазных синусоидальных сигнала от источников с малым внутренним сопротивлением. Частота 300 *кгц*. Если сердечник перемагничивается при подаче синусоидального сигнала на выходную обмотку трансформатора, то эта обмотка имеет большое сопротивление, что соответствует передаче единицы. Если сердечник не перемагничивается, то выходная обмотка имеет малое сопротивление, что соответствует передаче нуля. Транзисторный эмиттерный повторитель имеет коэффициент передачи по напряжению, близкий к единице, улучшает передаточную характеристику за счет насыщения триода, уменьшает влияние помех. Эмиттерный повторитель обеспечивает добавочное усиление по току, что дает возможность уменьшить мощность импульсов, поступающих от логических цепей. Для уменьшения влияния помех во вторичную обмотку трансформатора подается ток смещения. Дополнительный усилитель почти такой же, как и основной. В отличие от ранее разработанных схем задержка, вносимая дополнительным усилителем, равна полуциклу. На выходе усилителя имеется выходная схема И, которая обеспечивает быстрый заряд всех паразитных емкостей соединительных проводов. Один усилитель работает на 30 последующих схем.

Ю. Т. Печатников

**1 В387. Система элементов, использующая для выполнения логических функций транзисторы и сопротивления и предназначенная для применения в системах обработки данных.** Finch T. R. Transistor resistor logic circuits for digital data systems. «Proc. West. Joint Comput. Conf., Los Angeles, Calif.», 1958. № T-107. New York, 1959, 17—22 (англ.)

Приводятся общие соображения по подходу к выбору системы элементов. Автор считает, что главная задача разработчиков — предложить метод, позволяющий: 1) получить точную сводку всех интересующих характеристик системы, 2) выразить аналитически взаимосвязь этих характеристик через параметры элементов. Основные характеристики системы обработки данных, для которой предлагается система элементов: 1) система содержит десятки тысяч активных элементов, сотни тысяч пассивных элементов и миллионы электрических соединений; 2) полезный результат обработки данных получается после нескольких часов безаварийной работы системы; для того чтобы работа такой системы была бы экономически оправдана, необходимо, чтобы интервалы между сбоями в ее работе составляли бы не менее сотен часов; 3) целесообразность применения системы непосредственно связана с экономической выгодой, приносимой ее использованием; плохая надежность деталей отражается на стоимости эксплуатации; 4) каждая случайная ошибка при вычислениях обходится весьма дорого, но она не приводит к катастрофе, как это может иметь место в системах, работающих в реальном масштабе времени; 5) в рассматриваемой системе повышение быстродействия элементов целесообразно лишь в том случае, если оно приводит к снижению стоимости обработки данных, т. е. к экономическому выигрышу при эксплуатации системы.

Приведенные характеристики системы определяют требования к используемым в ней типовым элементам, которые должны, в первую очередь, обеспечить минимальную стоимость системы, учитывая расходы на проектирование, изготовление, монтаж и эксплуатацию. Всего в системе должно использоваться около 7500 таких элементов, каждый из которых имеет по 5 входов и может быть нагружен на 5 входов аналогичных элементов. Время задержки при прохождении сигнала через элемент не должно превышать 0,5 мксек. При выборе системы элементов наиболее важными характеристиками являются экономичность, надежность, гибкость и

возможность непосредственного перехода от спроектированных элементов к использованию этих элементов в работающей системе («designability»). При выборе между сложными схемами, позволяющими приблизить быстродействие элемента к быстродействию используемых в нем транзисторов и, таким образом, позволяющих обеспечить требуемое быстродействие при использовании сравнительно низкочастотных транзисторов, и простыми схемами, в которых быстродействие элемента значительно ниже быстродействия используемых транзисторов, следует остановиться на последнем варианте. Такой выбор определяется быстрым прогрессом производства высокочастотных транзисторов и возможностью проведения детального анализа надежности только для простых схем. Приводится описание принципа работы схем, использующих только сопротивления и транзисторы для выполнения любых логических операций. Определяется влияние основных характеристик типового элемента: допустимого числа входов и потрузок на время задержки при прохождении сигнала через элемент. Диапазон рабочих температур для предлагаемой системы элементов составляет +10°С ÷ +55°С. Исходя из наихудших сочетаний разбросов сопротивлений и уходов питающих напряжений, в схеме допускается использовать сопротивления с 5%-ными разбросами, источники питания с уходом напряжения в пределах ±4% и транзисторы с коэффициентом усиления по току (β), на 25% меньшим номинального. Приводятся сравнительные данные по задержкам в схемах, использующих микросплавные транзисторы 2N393 (время задержки 0,5 мксек. на одну схему) и микросплавные диффузионные транзисторы 2N501 (время задержки 0,2 мксек. на одну схему). Приводятся характеристики, определяющие допустимое число нагрузок у каждой схемы в зависимости от допусков на разбросы используемых сопротивлений и уходов питающих напряжений. Приводится сравнительная экономическая оценка двух систем элементов: с непосредственными связями и с логическими схемами на сопротивлениях, для цен 1958 г. и ожидаемых цен 1962 г. А. Б. Залкинд

**1 В388. Асинхронные электронные релейные схемы.** Kliman M., Lowenschuss O. Asynchronous electronic switching circuits. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, 7, № 4, 267—274 (англ.)

Рассмотрены вопросы построения асинхронных релейных схем на бесконтактных элементах. Отличительной особенностью таких схем является отсутствие каких-либо синхронизирующих или тактирующих устройств. В асинхронных схемах каждая очередная операция осуществляется сразу же по получении сигнала завершения предшествующей ей операции. Это во многих случаях обеспечивает более высокие скорости работы схемы, определяемые только быстродействием используемых элементов. Отсутствие синхронизирующих импульсов требует тщательного устранения при проектировании возможных нарушений работы асинхронной схемы в переходные периоды. Асинхронная схема регистра сдвига, построенная на транзисторах, работает примерно в 2 раза быстрее, чем обычная синхронная схема на тех же элементах. Асинхронные схемы обладают повышенной надежностью, предъявляют менее жесткие требования к характеристикам элементов. П. П. Пархоменко

**1 В389. Блок логических элементов на полупроводниковых приборах.** Шигин Е. К. «Научн. докл. высш. школы. Машиностр. и приборостр.», 1959, № 2, 190—200

**1 В390. Проблемы, связанные с конструированием быстродействующих печатающих устройств, выбором формата бумаги и ее обработкой.** Allen R. H. Form design, construction and paper handling problems as related to high speed printers, «Proc. Canad. Conf. Comput. and Data Process.», Toronto, 1958. Toronto, s. a., 191—201 (англ.)

Рассматриваются основные проблемы быстродействующих печатающих устройств. Приводятся три класса быстродействующих печатающих устройств: 1) Печатающее устройство, использующее вращающийся барабан. Скорость печатания 600—900 строк в 1 мин. 2) Матричное печатающее устройство. Печатающий механизм содержит серию матриц, сделанных из очень тонких проводов, в прямоугольном эталоне 5×7 проводов. Эталон прожигает алфавитно-числовые и специальные знаки на бумажной ленте. 3) Бесконтактное печатающее устройство, использующее электронно-магнитную систему. Знаки набираются как электронные заряды на поверхности электронной трубки, и их изображения регистрируются на бумаге посредством ксерографии. Достигнута скорость 5000 строк в 1 мин. Даются способы обработки бумаги на трех стадиях печатания: до печатания, во время печатания и после печатания. Рассматриваются проблемы, связанные с наматыванием бумажной ленты и копировальной бумаги на бобины перед печатанием и после печатания, вопросы прочности бумажной ленты, ее длины и формата в быстродействующих печатающих устройствах. Приводятся три типа лентопротяжных механизмов: 1) протягивание между вращающимися роликами и валом; при высоких скоростях возможно проскальзывание; 2) штырьковый лентопротяжный механизм; штырьки находятся по окружности вала и входят в отверстия ленты, наматывание бумаги происходит порциями; 3) так называемый «тракторный» лентопротяжный механизм, который представляет собой серию штырьков на бесконечной цепочке; протягивание ленты происходит непрерывно; такой лентопротяжный механизм применяется почти во всех быстродействующих печатающих устройствах, в частности в машинах ИБМ и УНИВАК. Н. И. Гомоляко

**1 В391. Конструирование автоматического устройства для вычерчивания графиков.** Atkinson M. P., Bane W. T., Barber D. L. A. A design for an automatic graph plotter. «Proc. Instn Electr. Engrs», 1959, B106, № 29, 452—453. Discuss., 453—454 (англ.)

В описываемом устройстве для автоматического вычерчивания графиков в прямоугольных координатах определение положения точек производится электромоторами, обеспечивающими с помощью червячных передач перемещение стола вдоль координаты *X* и перемещение головки с пером вдоль координаты *Y*. Управление движением производится от двоичных счетчиков, на которых записываются координаты точек и показания которых последовательно уменьшаются по мере перемещения головки к нужной позиции. Импульсы, уменьшающие показания счетчиков, генерируются фототранзисторными схемами, освещаемыми лучами света, проходящими сквозь 20 щелей в дисках, укрепленных на валах двигателей. При равных нулю показаниях обоих счетчиков происходит регистрация точки. Устройство позволяет наносить 3 точки в 1 сек. Приведена дискуссия о периферийном оборудовании вычислительных машин. О. В. Бачин

**1 В392. Диафрагмы цифрового координатографа.** Valach Miroslav. Clonky číslicového koordinátografu. «Stroje zpracov. inform.», 1957, № 5, 131—152 (чешск.; рез. русск., англ.)

Объясняется работа систем диафрагм при использовании их в цифровом координатографе. Рассматриваются две системы: с закрывающимися рядами и без закрывающихся рядов. Системы диафрагм предназначены для быстрого нахождения одного из 100×100 значков, расположенных в квадрате. Положение открытого диафрагмами значка дается сигналами, выраженными в коде Рубинова. Отмечается, что в основе двумерного координатографа лежит применение двух перпендикулярных систем диафрагм. Сравнивая общие характеристики систем диафрагм, автор приходит к следующему заключению: теория систем с закрывающимися рядами простая и за-

вершенная в отличие от теории систем диафрагм без закрывающихся рядов, но, с другой стороны, изготовление последних систем проще и может быть выполнено с меньшей точностью. В. Л. Евтеев

**1 В393. Цифровая избирательная система передачи команд для подвижной радиостанции.** Green James H., Gordon Jerry. A digital selective signaling system for mobile radio. «IRE Trans. Vehicular Communs», 1959, № 12, 74—85 (англ.)

Описывается система для передачи команды вызова на один из 511 однотипных приемников. Команда передается с помощью специальных кодов, представляющих собой 511-разрядную последовательность двоичных знаков. Такая последовательность двоичных знаков носит общее название последовательности максимальной длительности, или сокращенно, $m$-последовательности. $m$-последовательности были получены Хафменом и поэтому их иногда называют кодами Хафмена. Каждый из 511 адресов (команд) может быть получен путем циклической перестановки разрядов $m$-последовательности. Следующие свойства $m$-последовательности делают их чрезвычайно полезными в системе передачи команд:

1) Если одна из $m$-последовательностей поразрядно сравнивается с любой другой, полученной циклической перестановкой из первой, то количество совпадающих разрядов будет всегда на единицу меньше, чем несовпадающих. Это правило поясняется с помощью примера 1 для 15-разрядной $m$-последовательности ($m$-последовательности могут иметь длину, определяемую выражением $L=2^n-1$ для любого целого $n$).

Пример 1.

(а) 111100010011010
(б) 110101111000100

++−++−−+−+−−−−+

$\sum(+,-)=-1$

(а) 111100010011010
(с) 100110101111000

+−−+−+−−−−−+++−+

$\sum(+,-)=-1$

2) Поразрядное сравнение $m$-последовательности с точно такой же последовательностью (без сдвига) дает количество совпадений, равное числу разрядов. Это правило поясняется примером 2.

Пример 2.

(а) 111100010011010
(а) 111100010011010

+++++++++++++++

$\sum(+,-)=15$

3) $m$-последовательность длительности $L=2^n-1$ может быть получена на выходе $n$-разрядного сдвигающего регистра, в котором записано определенное начальное число. Несколько разрядов этого регистра суммируются по модулю 2 и сумма подается на вход этого же сдвигающего регистра.

4) Если $m$-последовательность, длительностью $L$, пропускать через $n$-разрядный сдвигающий регистр ($L=2^n-1$), некоторые разряды которого суммируются по модулю 2 (всего возможны $L$ комбинаций из различных разрядов), то на выходе устройства, суммирующего по модулю 2, может быть получена любая другая $m$-последовательность, получающаяся из первоначальной, подаваемой на вход сдвигающего регистра, путем циклической перестановки разрядов. Кодирующее устройство на командном пункте передает 2 последовательности ($A$ и $B$), отличающиеся друг от друга определенной циклической перестановкой (обе получены из одной $m$-последовательности). Последовательности $A$ и $B$ передаются на разных несущих частотах. Кодирование каждой из последовательностей осуществляется с помощью амплитудной модуляции соответствующих несущих частот. При получении кодов кодирующее устройство использует правило 3). Каждое из 511 приемных устройств принимает обе последовательности. Последовательность $B$ запоминается, а последовательность $A$ преобразуется с помощью правила 4) декодирующим устройством. Отводы от сдвигающего регистра на сумматор по модулю 2 декодирующего устройства каждого приемника берутся различным образом, поэтому все последовательности, полученные после преобразования последовательности $A$ декодирующими устройствами различных приемных устройств, оказываются отличными друг от друга. Только для одного, выбранного приемника преобразованная последовательность $A$ оказывается совпадающей с последовательностью $B$. Это выясняется с помощью схемы поразрядного сравнения, работающей в соответствии с правилами 1) и 2). В. П. Парамонов

**1 В394. К объединению автоматической обработки данных и связи.** Luebbert W. F. A systems approach to integration of automatic data processing and communications. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 4, 223—230 (англ.)

Рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с актуальной темой объединения устройств связи и обработки данных в единую систему и сообщаются первые результаты работ в этом направлении, проведенных в США по созданию автоматической армейской службы связи. Одной из важных предпосылок введения устройств для обработки данных в связь явилась их способность концентрировать передаваемые сообщения как за счет устранения из «сырого» материала элементов с малой информацией, так и за счет уплотнения работы самой аппаратуры связи. Степень такой концентрации может достигать отношения 1/10 для каждого из названных участков связи. Благодаря появлению устройств для обработки данных меняется и сама концепция связи, которая сейчас рассматривается не только как передача информации из одного пункта в другой, но и как преобразование ее в отношении формы, системы кодирования, формата и т. п. Практическим осуществлением новых взглядов на систему связи явилась разработка FIELDATA, предназначенная для совместной работы не только с обычными коммерческими машинами и узлами для обработки данных, но с системами ПВО, работающими в масштабе истинного времени, а также с телеграфными линиями. Может обрабатываться цифровая и буквенная информация, задаваемая в виде кода Боде (телеграфный код для телетайпов), пробивок перфокарт и т. д., и, наряду с общеизвестными сообщениями, представляющая цифровое выражение голоса, факсимиле и других типов аналоговых сообщений. Разработка FIELDATA включает в себя три рода оборудования: 1) входные и выходные преобразователи, 2) передающие преобразователи-модуляторы, 3) встроенное оборудование для управления и контроля («embolic equipment»). Вся информация, поступающая на новую линию связи, называется первичной и не приспособлена для обработки машинами, поэтому она превращается системой связи во вторичную, выраженную на языке устройства для обработки данных. В этой стадии устройства управления и контроля вводят в информацию признаки, избыточность, если последняя требуется, программируют передачу сообщений и т. д. Один из разделов статьи посвящен контролю ошибок. Отмечается, что в последнее время достаточно изучены лишь ошибки с гауссовым распределением и нет еще практически оценок влияния импульсных помех, перекрестных помех, вариаций условий распространения. При случайном законе двойные ошибки появляются редко и здесь может оказаться сильным средством простая проверка на четность. Так, эта проверка уменьшает вероятность ошибки с $10^{-4}$ до

$10^{-3}$. Однако если имеется опасность возникновения двойных ошибок и вторая ошибка, следующая сразу за первой, имеет условную вероятность 0,5, то проверка на четность снизит вероятность появления на выходе ошибочного сообщения лишь до $0{,}5\times10^{-4}$. Поэтому применяют более мощные методы, особенно необходимые при передаче программ для вычислительных машин. Вообще подход к исправлению ошибок в разработке FIELDATA таков, что выбор метода контроля ошибок должен зависеть от характера использования и степени важности сообщения. FIELDATA имеет в своем составе следующее оборудование: 1) Преобразователи-передатчики: AN/TSQ-32 (600—1200 разрядов в 1 сек.), AN/TSQ-33 (600—2400 разрядов в 1 сек.), AN/TSQ-35 (19 200 разрядов в 1 сек.). 2) Универсальные вычислительные машины: MOBIDIC, BASICPAC/LOGICPAC, INEFORMER/DATA COORDINATOR. 3) Входные и выходные преобразователи: электротелетайп, трансмиттер с перфолентой, перфоратор, быстродействующее печатное устройство, лентопротяжка для бумаги, магнитная лента (протяжка). 4) Специальное встроенное оборудование: CV-689 — устройство тайнописи, CV-690 — устройство управления, CV-691 — концентратор данных.

Дано краткое описание рабочих характеристик этих устройств и намечены тенденции их развития. В приложении к статье даны коды FIELDATA: 6-разрядный для буквенно-цифровой информации и 6-разрядный код для контрольно-управляющих функций. Для их отличия предусмотрено добавление седьмого двоичного разряда, служащего признаком информации. А. Ф. Смирнов

**1 В395. Аналого-цифровой преобразователь—.** Analogue to digital converter. «Process Control and Automat.», 1960, **7**, № 1, 29—30 (англ.)

Описывается преобразователь входного напряжения в цифровую форму типа «Муллард Л-281». Преобразователь целиком выполнен на транзисторах и обладает точностью в 10 двоичных разрядов (0,1%). Диапазон входного напряжения от 0 до 10 *в*, положительной полярности. Указывается, однако, что этот диапазон может быть легко расширен. Преобразователь построен по схеме поразрядного сравнения. Исследуемое напряжение положительной полярности подводится к одному из входов прецизионного сравнивающего суммирующего усилителя постоянного тока. На остальные десять входов этого усилителя через соответствующие входные сопротивления последовательно подается эталонное напряжение —10 *в*. Сравнение начинается со старшего разряда ($2^9$). Возбуждается триггер старшего разряда и подключает эталонное напряжение к соответствующему входу усилителя. Если этот разряд не содержится в исследуемом напряжении, то на выходе сравнивающего усилителя появляется разбаланс, открывающий вентиль, через который проходит импульс гашения триггера этого разряда. Если данный разряд содержится в исследуемом напряжении, то разбаланс на выходе сравнивающего усилителя имеет обратный знак и вентиль гашения данного разряда остается закрытым. Вслед за этим возбуждается триггер следующего двоичного разряда, подающий на соответствующий ему вход сравнивающего усилителя то же эталонное напряжение, но коэффициент усиления по этому входу вдвое меньше, чем по входу предыдущего старшего разряда. Синхронизирующее устройство собрано по схеме кольцевого счетчика, питаемого импульсами от мультивибратора. Подключение мультивибратора к кольцевому счетчику производится внешними сигналами. Предельная частота перевода напряжения в число 1000 раз в 1 сек. Сопротивление входа суммирующего усилителя по старшему разряду 10 *ком*, по каждому последующему в 2 раза больше (коэффициент усиления соответственно в 2 раза меньше). Достигнута температурная стабильность работы преобразователя в пределах старшего разряда в диапазоне от 20 до 30°. Съем результата может производиться в последовательном или параллельном коде. К преобразователю разработан перфорационный блок, осуществляющий перфорацию на ленте результатов преобразования в двоичном или десятичном коде. Перевод в десятичную форму осуществляется с помощью диодной матрицы. Г. Г. Рабинович

**1 В396. Преобразование электрических измеряемых величин в цифровые значения.** Staritz Rud F. Die Umwandlung elektrischer Meßgrößen in Digitalwerte. «Elektronik», 1959, 8, № 9, 265—269 (нем.)

Рассмотрен принцип действия аналого-цифровых преобразователей, предназначенных для преобразования электрического напряжения в десятичный или бинарный цифровой код. Приведена электрическая схема цифрового вольт-омметра модель 400 фирмы «Franklin Electronics Inc.» (США) и подробно описан порядок работы элементов и узлов этого прибора. Библ. 5 назв.

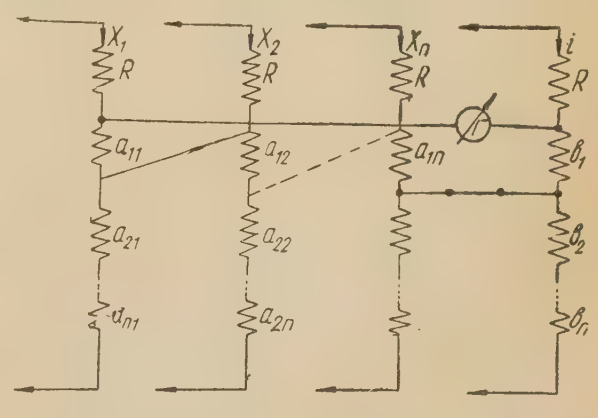
Б. Е. Бердичевский

**1 В397. «Лилавати» — новое моделирующее устройство для решения совместных линейных уравнений и связанных с ними задач. Часть I. Общий принцип и конструкция модели 1.** Ramachandran G. N., Krishnamurthy E. V. «Līlāvatī» — a new analogue computer for solving linear simultaneous equations and related problems. Part I. General principles and design of model 1. «Proc. Indian Acad. Sci.», 1958, **A48**, № 3, 152—164 (англ.)

В большинстве электрических моделирующих устройств, созданных для решения совместных линейных уравнений, значения компонент уравнения задаются напряжениями, а умножение и сложение осуществляются либо на потенциометрах, либо на трансформаторах. Существенным недостатком таких устройств является отсутствие нулевого положения, при котором ток через измеряемую цепь равен нулю, и нелинейность под действием нагрузки. Авторам статьи удалось устранить эти недостатки, применив другой метод умножения. В уравнении

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}x_s = B_r \quad (r=1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

значение $x$ представляется током, значение $a$ — сопротивлением, тогда напряжение на сопротивлении даст произведение $y=ax$. Операция точно линейна и осуществляется с такой же степенью точности, что и закон Ома. Ток $x$ измеряется нулевым методом с помощью стандартного сопротивления, включаемого последовательно с сопротивлением $a$. Моделирующая цепь для уравнения (1) выглядит следующим образом: (см. рисунок).




Напряжение $b$ может устанавливаться равным требуемому либо изменением тока $i$ через $R$, либо изменением $R$ при постоянном токе, в зависимости от задачи. Таким образом умножение на основе закона Ома и последовательное суммирование отдельных напряжений положены в основу нового моделирующего устройства, бо-

лее дешевого в изготовлении и обладающего высокой точностью. Система уравнений (1) решается итерационным методом. Величины $a$, $x$, $b$ могут быть положительными и отрицательными. Знак устанавливается с помощью двухполюсного переключателя. Сопротивления устанавливаются с помощью моста Уитстона с точностью в 1%. В статье приводится фотография устройства («Лилавати» — модель 1) для решения системы из трех уравнений. Модель испытывалась много месяцев и дала хорошие результаты. Установка коэффициентов $a_{rs}$ и $b_{rs}$ осуществляется легко и, чтобы получить итерационный процесс, нужно переключатель поставить в три различных положения, устанавливая каждый раз соответствующим потенциометром гальванометр на нуль. Эта модель может применяться для инверсии матриц, умножения матриц и решения вековых уравнений, встречающихся в теории вибрации. А. Ф. Мевис

**1 В398. Электронные моделирующие устройства.** Hoehl Bernhard. Elektronische Analogrechenanlagen. «VDI-Zeitschrift», 1959, **101**, № 21, 1020—1021 (нем.)

Отмечается, что на промышленной выставке 1959 г. в Ганновере было представлено много малых и средних электронных моделирующих устройств. Приведены краткие описания и основные технические характеристики четырех из них: «Доннер-3100» («Donner-3100») фирмы «Donner Scientific Co.», ЭМИАК II (EMIAC II) фирмы «EMI Electronics Ltd», «Minispace» фирмы «Solartron» и RA-463 фирмы «Telefunken». Б. Е. Бердичевский

**1 В399. Большое электрическое моделирующее устройство медленного действия (типа NEAC-P).** «Эрэкутороникусу», 1959, **4**, № 12, 1383 (японск.)

**1 В400. Аналоговая счетная машина ARS фирмы «Хитати».** «Эрэкутороникусу», 1959, **4**, № 11, 1256 (японск.)

**1 В401. Электронное устройство для моделирования.** Derzhansky A., Stainov G. Electronic circuit modelling a power function. «Докл. Болг. АН», 1958, **11**, № 4, 271—274 (англ.; рез. русск.)

Описывается электронное устройство, моделирующее степенную функцию. Работа устройства основана на закономерности процесса разряда конденсатора на постоянное сопротивление. Моделирующее устройство включает в себя электронные лампы, полупроводниковые диоды, сопротивления и конденсаторы. Суммарная погрешность моделирующего устройства составляет около 2% от максимальной величины выходного напряжения. Питание устройства производится от стабилизированного источника. Приводятся примеры моделирования различных степенных функций. А. А. Крюков

**1 В402. АЙДАР — специализированное моделирующее устройство для первоначальной обработки данных о рыскании (снаряда).** Zaroodny Serge J., Leser Tadeusz. AYDAR, special purpose analog machine for yaw data reduction. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1958, **5**, № 1, 89—99 (англ.)

Данные о рыскании снаряда в полете (т. е. о движении продольной оси снаряда по циклоиде вокруг траектории полета) обычно получаются экспериментальными замерами, результаты которых обрабатываются на электронных цифровых вычислительных машинах. Перед тем, как передать результаты эксперимента на обработку при помощи цифровой вычислительной машины, требуется произвести прикидочную их оценку, чтобы отбросить неточные данные и получить аппроксимированные значения некоторых параметров. Для такой прикидочной оценки предназначено описываемое аналоговое механическое вычислительное устройство АЙДАР (AYDAR). Оно состоит из 24 колец, коаксиально расположенных на одной оси. Кольца могут вращаться независимо друг от друга и имеют натянутые по диаметру тонкие проволочки с движками на них. Каждое кольцо устанавливается так, чтобы проволочка образовала с общим выбранным направлением угол, равный углу ориентации снаряда в некоторый момент, данные о котором имеются в предварительно оцениваемых результатах эксперимента. Движок на проволочке этого кольца устанавливается на расстояние от оси вращения кольца, пропорциональное имевшему место в этой точке полета углу рыскания. Расстояние каждого кольца от начальной точки оси может регулироваться пропорционально дальности каждой изображаемой точки замера от некоторой начальной точки полета. В начальной точке оси располагается точечный источник света, который проектирует изображения движков на экран, расположенный позади комплекта колец. Оптическая система позволяет создавать поток параллельных или расходящихся лучей. В потоке параллельных лучей точки, проектируемые от движков, образуют на экране изображение траектории оси снаряда по картинной плоскости. Постепенным увеличением угла расхождения лучей затем добиваются, чтобы точки образовали на экране логарифмическую спираль. После этого перемещают источник света до тех пор, пока спираль не превратится в окружность. По величинам необходимых на отдельных этапах регулировок оптической системы приближенно определяют углы прецессии и нутации, имевшие место в анализируемом полете. Выпавшие при таком приближенном анализе точки исключаются из дальнейшего рассмотрения как неточно снятые. И. Д. Алимов

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

**(Перед номерами рефератов опущены номер и индекс 1 В выпуска)**


**А**

Амбарцумян Г. А. 27
Амиантов И. Н. 177
Андреев Н. И. 154
Аримидзу Т. 110

**Б**

Барк Л. С. 319 К
Башарин Г. П. 81
Беляев Ю. К. 33, 55 Д
Бендерский Я. М. 165
Березин И. С. 308 К, 309 К
Блэккуэлл Д. 48
Болотин В. В. 162
Булеев Н. И. 248
Бунимович В. И. 200

**В**

Валландер С. В. 226
Винокуров В. Г. 2
Воронцов Б. Д. 273

**Г**

Гармаш В. А. 213
Гончаров А. М. 384
Гусев В. Д. 236

**Д**

Дашевский Л. Н. 368
Дерюгин Н. Г. 173
Дэкава Ю. 354

**Ж**

Жидков Н. П. 309 К

**И**

Икено 202
Ито К. 49, 52

**К**

Кавакита 127
Каменський І. І. 76
Карпов К. А. 320 К
Касугая Н. 262
Каясима К. 356
Киреева И. Е. 320 К
Киясу Д. 355
Кловский Д. Д. 201
Коробов Н. М. 256
Королюк В. С. 22
Костовский А. Н. 269
Купер В. 146 К
Кухтенко А. И. 232
Кухтенко В. И. 149

**Л**

Лебедев Д. С. 213
Ле-Кам Л. 102
Леонов В. П. 8
Либерман Л. Х. 255
Линник Ю. В. 15
Ли Хен Вон 194

**М**

Мартынихина Т.

Маруяма Г. 50
Мацуда С. 130
Михов И. 287
Морита К. 297

О

Овсеевич И. А. 184

П

Панкратьева Н. В. 122
Пентковский М. В. 305 К
Пинскер М. С. 184
Погребинский С. Б. 368
Прохоров Ю. В. 12
Пупков К. А. 156

Р

Рабинович З. Л. 369
Ремез Є. Я. 280
Рогозин Б. А. 11
Розанов Ю. А. 31
Розенблат-Рот М. 39
Рябенький В. С. 283

С

Самарский А. А. 244, 245
Симада С. 356
Симокава Я. 297
Смагин А. В. 420
Смолицкий Х. Л. 152
Сморкачев Е. Т. 301
Судзуки 127

Т

Такада С. 356
Такахаси С. 349, 350
Тарантович А. С. 384
Тарасенко Ф. П. 188
Тая Т. 296
Телькснис Л. А. 158
Тихонов А. Н. 244, 245
Тихонов В. И. 177
Тюринг Б. 329

Ф

Феллер В. 51
Фельдбаум А. А. 157
Франкел С. П. 367
Фудзивара С. 363
Фурдуев В. В. 186

Х

Хаяси 231
Хендерсон А. 146 К
Христов В. К. 317 К

Ц

Цуккерман И. И. 172

Ч

Чарис А. 146 К
Чехонадский Н. А. 238
Чжан Ли-цянь 100, 101
Чжоу С. К. 111
Чукреев П. А. 152

Ш

Шарыгин И. Ф. 257
Шигин Е. К. 389
Ширяев А. Н. 8

Я

Яманака К. 360

---

A

Abels J. C. 292
Albuquerque L. 47
Allen R. H. 390
Andrian A. 304 K
Arimizu T. 110
Arneth W 230
Aronszajn N. 119
Ashford J. R. 216
Aspinall D. 371
Atkinson M. P. 391
Atkinson R. C. 214
Austin D. G. 28
Austin T. L. 6
Avery R. W. 331

B

Bach R. L. 261
Backer W. de 413
Baker G. A., Jr 268
Bane W. T. 391
Barber D. L. A. 391
Barlow R. E. 150
Barraclough E. D. 96
Bass J. 19
Baten W. D. 87
Batteau D. W. 155
Baxter G. 32
Beckmann M. 143
Behrens W. U. 83
Bellman R. 107—109
Bennett B. M. 73
Bentzon M. W. 217
Berry W. G. 286
Bertrandias J. P. 18
Besuden H. 7
Béthouxa P. 176
Bhargav R. P. 104
Bharucha-Reid A. T. 42,43
Bílý J. 24, 25
Bishop W. B. 160
Blachman N. M. 344
Black G. 286
Blackford S. H. 331
Blackwell D. 48
Block E. 57
Blum M. 196
Bobillier P. A. 325
Bödewadt U. T. 284
Bodmer W. F. 80, 274
Bona M. 161
Booton R. C., Jr 175
Brakhage H. 254
Breny H. 78
Brigham G. 144
Brock R. L. 198
Brown J. A. C. 147 K
Buck D. A. 376
Burkholder D. L. 63

C

Cain A. L. 380
Candlin D. J. 225
Carlson P. G 58
Cass J. 335
Chenery H. B. 131
Cheng Shaw-lian 30
Chow C. K. 111
Clemans K. G. 6
Collatz L. 276
Colley J. L. 148
Colver R. M. 221
Conway A. C. 379
Cook J. L. 313
Cornwall J. 139
Cullmann G. 54 K
Curtin K. M. 153

D

Dacey M. F. 126
Dagnelie P. 241
Daňda J. 385
Dantzig D. 64
Dantzig G. B. 125
Darlington S. 181
David H. T. 169
Davies H. M. 88
Debart H. P. 36
Denis-Papin M. 54 K
Derman C. 116, 242 K
Derzhansky A. 401
Deutsch R. 46
Doornbos R. 98
Dück W. 267

E

Edwards D. B. G. 371
Elandt R. 210
Elliott D. 313
Enderby J. A. 286
Englman R. 41
Engvall A. 208

F

Fabius J. 44
Fagen R. E. 6
Fay E. A. 169
Feller W. 51
Ferguson C. E. 133
Finch P. D. 204
Finch T. R. 387
Fischer J. 303
Fisher G. R. 66
Flavien L. 318 K
Fleischer I. 94
Foldés G. 206
Frame J. S. 87
Frankel S. 335, 367
Fulkerson D. R. 125

G

Gass S. I. 145 K
Gerwin R. 347
Gilbert E. G. 179
Gloden A. 315
Glover A. C. 382
Goldstein M. H., Jr 175
Gonagin A. 103
Goodman L. A. 93
Goodman N. R. 199
Gordon J. 393
Gorman C. D. 20
Graaff W. D. 292
Grabiel F. 45
Green J. H. 393
Grenander U. 14, 228
Grochowina J. 167
Gumbel E. J. 97

H

Haight F. A. 68
Halton J. H. 258
Hamaker H. C. 240
Hammel D. 366
Hammerle K. J. 198
Harris B. 190
Harris J. R. 337
Harris T. E. 211
Hauptschein A. 190
Hayashi C. 231
Heinrich H. 275
Heller I. 123
Hewlett P. S. 218
Higuti I. 59
Hoehl B. 398
Homma T. 17
Hubbell J. H. 261
Huggins W. H. 187
Hunfalvy T. 265
Hunter L. C. 150

I

Imlauf J. 295
Ionescu D. V. 263
Iorga M. 304 K
Ito K. 49, 52
Ivanović B. 106 K

J

Jain S. K. 223
Jándy G. 128
Janos W. A. 180
Jaworski W. 364
Jeanneret C. 343
Johansen D. 183
Johns M. V. 5
Johnson E. E. 298
Johnson H. G. 137
Johnson S. M. 125
Jones C. V. 293
Jowett G. H. 88

K

Kabe D. G. 99
Kac M. 53 K
Kalaba R. 107—109
Kampé de Fériet J. 1
Kampen N. G. van 227
Kantorovitz S. 10
Karr P. R. 182
Kasugaya N. 262
Katz S. 199
Kaufmann L. 54 K
Kawakita Y. 127
Kenen P. B. 142
Kilburn T. 371
Kinzi H. P. 115
Klein M. 242 K
Kliman M. 388
Knighting E. 340
Kondo J. 209
Kooharian A. 94
Koyanagi Y. 209
Kreiken E. A. 92
Krekó B. 266
Kretschmer K. S. 131
Krickeberg K. 23
Krishnamurthy E. V. 397
Kubik L. 13
Kuhn H. W. 121
Kuiper N. H. 89
Kuntzmann J. 294
Künzi H. P. 115
Kupperman M. 77

L

Lai D. C. 187
Lamkin J. C. 261
Land A. 120
Lange F. H. 229
Langhammer R. 307K
La Rochelle J. A. 160
Laurent A. G. 134
Laurikainen K. V. 311
Le Cam L. 102
Lee Y. W. 185
Lees M. 253
Leiner A. L. 336

Leser T. 402
Levitan R. E. 129
Lévy P. 9
Lieberman G. J. 321 K
Le Cam L. 102
Li Shu-T'ien 365
Loeb J. 192
Longman T. 338
Lorenz P. 243 K
Lory H. J. 187
Lowenschuss O. 207, 388
Ludwig O. 220
Luebbert W. F. 394

M

McDonnell J. A. 331
McFadden J. A. 178, 197
Machmudov U. 351
Mack C. 271
Mackeprang B. 217
Mac Kinnon W. J. 90
Maehly H. J. 279
Maguire T. 372
Malécot G. 21
Mandelbrot B. 212
Manfrino R. 234
Marek J. M. 312
Marinescu A. 304 K
Marschak T. 143
Maruyama G. 29, 50
Masuyama M. 222
Meagher R. E. 373
Merril R. F. 250
Meyer A. 4
Michels A. 292
Mijares T. A. 60
Minsky H. P. 141
Mode C. J. 215
Morgan K. C. 190
Moriguti S. 168
Morton J. P. 327
Mott J. L. 26

N

Nagler H. 324
Nash-Williams C. S. J. A. 224
Németh F. 265
Notz W. A. 336
Novák M. 260

O

Oderfeld J. 166
Olver F. W. J. (Ed.) 322 K
Onicescu O. 3
Ord G. 378
Ortel W. C. G. 374
Osborne M. F. M. 135
Osborne M. R. 247

P

Padwick G. C. 380
Page E. S. 96
Palmer D. S. 205
Parzen E. 35
Paszkowski S. 281, 282
Penney W. F. 6
Petrželka J. 259
Pierce J. N. 191, 193
Pillai K. C. S. 60
Plackett R. L. 218
Pollak H. O. 14
Pösch H. 328
Prabhu N. U. 233
Prager W. 117
Pyke R. 5

R

Radok J. R. M. 250
Ramachandran G. N. 397
Ramasubban T. A. 61
Ray A. 342
Reiger S. 189
Rényi A. 40, 163
Resnikoff G. J. 321 K
Rhoderick E. H. 383
Rice R. 377
Riordan J. 6
Rios S. 84
Robertson W. H. 74
Robin P. 314
Robinson E. A. 34
Robinson H. F. 215
Romani J. 91
Rose A. 370
Röthlisberger I. 345
Rudzki W. 167
Rush S. 239

S

Salzer H. E. 277
Samuels J. C. 159
Sankaran M. 79
Sarafyan D. 270
Saw J. G. 69
Scheffe H. 164
Schlesinger S. 246
Schneider B. 219
Schwartz L. S. 190
Sconzo P. 288
Šefl O. 195
Segal R. J. 333
Seldam C. A. T. 292
Sethuraman J. 62
Shoulders K. R. 376
Simkin G. S. 352
Simon H. 289
Siotani M. 82
Šisler M. 272
Slavíček O. 259
Slepian D. 14
Smith J. L. 336
Smith W. L. 16
Somers R. H. 86
Srivastava A. B. L. 70
Stahlknecht P. 124
Stainov G. 401
Staritz R. F. 396
Stein S. 183
Steinhaus H. 56
Sterzer F. 375
Stiefel E. 264, 278
Stobbe A. 140
Stoller D. S. 290
Stone W. M. 198
Striebel C. T. 95
Sugai I. 249
Sukhatme B. V. 62
Sundaresan K. 75
Suzuki M. 127
Svoboda F. 285

T

Takahashi S. 348
Talacko J. 113
Tanaka H. 29
Taranto D. 291
Taya T. 296
Tetzner K. 339
Tikkiwal B. D. 99
Tintner G. 136, 138
Toda H. 170
Törnig W. 251, 252
Tucker H. G. 37
Tverberg H. 38

U

Uberoi M. S. 179
Ulbricht H. W. 346

V

Valach M. 323, 392
Van Laethem M. 306 K
Vaughan P. A. 237
Verdoorn P. J. 132
Vessereau A. 71
Vurcfeld J. 302

W

Wagner H. M. 114
Wallström B. 203
Walsh J. E. 169
Ward D. H. 300
Warmus M. 299
Weber E. 171
Weiler H. 72
Weinberger A. 336
Whittle P. 67
Williams E. 105 K
Winkel H. 112
Wisniewski K. 167
Wojtowicz W. 316 K
Wolter H. 174

Z

Zaroodny S. J. 402
Zubrzyck S. 166

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
## ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях:

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА—Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ—Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ—Главный редактор канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ—Главный редактор профессор *Ю. Г. Саушкин*. ГЕОЛОГИЯ—Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА—Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО—Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА—Главный редактор канд. физ.-мат. наук *Р. В. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ—Главный редактор канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг*, МЕТАЛЛУРГИЯ—Главный редактор член-корр. АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА—Главный редактор академик АН СССР *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ—Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА—Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ—Главный редактор профессор *В. В. Кафаров*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ—Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА—Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*


## СОДЕРЖАНИЕ
### СВОДНОГО ТОМА РЖ МАТЕМАТИКА № 1 за 1961 г.


1 А. Общие вопросы . . . . . 1А1
История математики. Персоналия . . . 1А24
Преподавание математики . . . . . 1А42
Основания математики и математическая логика . . . . . 1А64
Теория чисел . . . . . 1А105
Алгебра . . . . . 1А153
Многочлены и линейная алгебра . . . 1А155
Группы . . . . . 1А203
Поля, кольца, алгебры и структуры . . 1А245
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология . . . . . 1А293
Геометрия . . . . . 1А328
Приложения геометрии . . . . . 1А332
Элементарная геометрия . . . . . 1А347
Аналитическая геометрия . . . . . 1А375
Проективная и неевклидовы геометрии 1А387
Начертательная геометрия . . . . . 1А392
Алгебраическая геометрия . . . . . 1А401
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства . . . . . 1А411
Геометрия *n*-мерного пространства . . 1А434
Теория относительности . . . . . 1А462
Глобальная теория дифференцируемых многообразий . . . . . 1А482
Метрические методы в геометрии . . . 1А492
Выпуклые многообразия . . . . . 1А494
1 Б. Теория функций действительного переменного . . . . . 1Б1
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями . . . . . 1Б13
Теория функций комплексного переменного 1Б31
Дифференциальные уравнения
Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . . 1Б121
Уравнения в частных производных . . 1Б177
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . 1Б210
Интегральные уравнения . . . . . 1Б295
Вариационное исчисление . . . . . 1Б305
Анализ (другие вопросы) . . . . . 1Б314
Числовые ряды . . . . . 1Б323
Специальные функции . . . . . 1Б333
Интегральные преобразования и операционное исчисление . . . . . 1Б353
Приложения общих методов математического анализа . . . . . 1Б365
Функциональный анализ . . . . . 1Б373
1В. Теория вероятностей . . . . . 1В1
Математическая статистика . . . . . 1В56
Теория игр, исследование операций и математическая экономика . . . . . 1В107
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов . . . . . 1В148
Численные и графические методы . . . 1В244
Таблицы . . . . . 1В311
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . 1В323
Применение вычислительных машин . . —
Авторский указатель . . . . . —



Технический редактор *Г. А. Шевченко*

Подписано в печать 26/I-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆

Печ. л. 4,5 Бум. л. 2,25 Уч.-изд. л. 12,82 Тираж 910 Заказ 4386

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский проспект, 403

Цена 38 коп.

01477/4

ГПНТБ СО АН СССР
60
Р.П.Я Ш. 1698
ТЕХ. БИБЛИОТЕКА
1967

1/12 36-00